Untersuchungen über die ptolemäische Theorie der unteren Planeten.

(Merkur und Venus.)

Inaugural-Dissertation

der mathematischen und naturwissenschaltlichen Fakultät

der

Kaiser Wilhelms-Universität

Straßburg

zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Carl Schumacher,

Oberlehrer in Sterkrade (Rheinl.).

R. UNIV BIBLIOTHEEK LEIDEN

Münster i. W. 1917.

Druck der Aschendorffschen Buchdruckerei.

Referent:

Professor Dr. J. Bauschinger.

Vorwort.

Nachstehende Blätter verdanken ihre Entstehung einer Anregung des Herrn Geheimrats Prof. Dr. W. Foerster in Berlin, der schon seit vielen Jahren darauf bedacht gewesen ist, die Verdienste des viel geschmähten griechischen Astronomen Klaudius Ptolemäus um die Himmelskunde in das rechte Licht zu setzen. Nach seiner Ansicht verdient der Alexandriner den Namen „eines großen Astronomen“ durch zwei astronomische Leistungen ersten Ranges:

erstens die Feststellung und sinnreiche mathematisch-rechnerische Darstellung des wichtigsten Gliedes derjenigen Störungswirkungen, durch welche die Bewegung des Mondes um die Erde in so erheblicher und verwickelter Weise von der Anziehung der Sonne beeinflußt wird (Evektion);

zweitens die Entdeckung der sogenannten „Zweiteilung“ der Exzentrizitäten der Planetenbahnen, ein weit über Hipparch hinausgehender Fortschritt der planetarischen Bewegungslehre.

Auf beide Leistungen des Ptolemäus hat Prof. W. Foerster wiederholt hingewiesen. Er veranlaßte 1878 die Dissertation von P. Kempf „Untersuchungen über die ptolemäische Theorie der Mondbewegung“ und ersuchte 1904 die philosophische Fakultät der Berliner Universität, für den Königlichen Preis die Aufgabe zu stellen: „Darstellung und Prüfung der Merkurtheorie des Ptolemäus“. Verfasser löste diese Aufgabe und erhielt am 3. August 1905 den ausgesetzten Preis.

Gerade Merkur, der unter den altbekannten Planeten die am stärksten exzentrische Bahnform besitzt, bot den sorgfältigen Untersuchungen der griechischen Astronomen große Schwierigkeiten. Ptolemäus mußte sehr künstliche Annahmen über die Bewegung des Mittelpunktes seiner Bahn machen. Hierdurch aber wurde er veranlaßt, ähnliches auch bei Venus, deren ellip-

tische Bahn um die Sonne fast einer Kreislinie gleichkommt, anzunehmen. Verfasser hielt es darum für angebracht, die ptolemäischen Theorien beider Planeten zur Darstellung zu bringen, um vor allem zu zeigen, wie auf der Exzentrizitätstheorie des Hipparch sich die Exzentizitätstheorie des Ptolemäus aufbaut, aus der das bekannte Flächengesetz abzuleiten erst dem mathematischen Genie Keplers fast 1500 Jahre später gelang.

Sterkrade (Rhld.), 1916 Dezember.

Untersuchungen über die ptolemäische Theorie der unteren Planeten.

(Merkur und Venus.)

27 Figuren, 5 Tafeln.

Inhalt.

Seite

1. Einleitung 7
2. Die mittlere zodiakale und anomalistische Bewegung des Merkur und der Venus 14
3. Der exzentrische Kreis 18
4. Der Epizykel. 20
5. Die Theorie der Venus 24
6. Die Theorie des Merkur 26
7. Die Bahnelemente der Venus 28
8. Berechnung des Ortes der Venus zu gegebener Zeit . . 33
9. Die Bahnelemente des Merkur 39
9a. Beispiel einer ptolemäischen Rechnung 45
10. Berechnung des Ortes des Merkur zu gegebener Zeit . . 48
11. Tafeln für die Bewegung des Merkur und der Venus in Länge 53
12. Die Stillstände des Merkur und der Venus 56
13. Die Schwankungen des Merkur und der Venus in Breite . 58
14. Schluß 68

1. Einleitung.

Den Himmelsbeobachtern des Altertums waren schon früh jene Erscheinungen bekannt, die von der wechselnden Stellung der Planeten zur Sonne und Erde herrühren und sich auch in der wechselnden Lichtintensität und Schnelligkeit der Bewegung bei den einzelnen Planeten kund tun. Es ist dies das erstmalige Hervortreten der Planeten aus den Sonnenstrahlen (heliakischer Aufgang), ihr erster Stillstand, ihre Opposition mit der Sonne, ihr zweiter Stillstand und ihr Verschwinden in den Sonnenstrahlen (heliakischer Untergang). Diese regelmäßigen Haupterscheinungen in den Bahnen der Planeten verlaufen bei den inneren oder unteren Planeten (Merkur und Venus) folgendermaßen.

Scheinbare (geozentrische) Bahn der Venus.

Wenn Erde — Sonne — Venus sich auf einer geraden Linie befinden, so ist die Venus wegen des Sonnenlichtes für uns unsichtbar, sie ist in oberer Konjunktion mit der Sonne. Sonne und Venus bewegen sich weiter von W. nach O., letztere aber rascher, sie entfernt sich also immer mehr von der Linie Erde—Sonne in östlicher Richtung. Am 40.^{d} beträgt diese östliche Entfernung (Elongation) von der Sonne 10^{0}, Venus wird zum ersten Male nach Sonnenuntergang am Westhimmel als Abendstern sichtbar (heliakischer Aufgang). Der Planet vergrößert in den folgenden Monaten seine Elongation immer mehr und damit auch seine Lichtintensität. Die scheinbare Geschwindigkeit (tägliche Fortbewegung unter den Fixsternen), die zur Zeit der oberen Konjunktion am größten (etwa $1^{0}15'$) war, nimmt langsam ab. Am 222.^{d} hat Venus ihre größte östliche Elongation ($46^{0}5'$) erreicht, die scheinbare Geschwindigkeit beträgt etwa 1^{0} und nimmt jetzt rasch ab. Die scheinbare tägliche Bewegung der Sonne nimmt zu, übertrifft die des Planeten. Die Sonne nähert sich rasch der Venus. Am 272.^{d} bei einer Elongation von 28^{0} kommt Venus zum Stillstand und wird rückläufig d. h. bewegt sich nun unter den Fixsternen scheinbar von O. nach W. mit wachsender Schnellig-

keit. Am 287.d bei einer Elongation von 10° und einer Geschwindigkeit von etwa 30′ verschwindet der Planet in den Sonnenstrahlen (heliakischer Untergang), er hört auf, Abendstern zu sein. Venus bleibt nun 14 Tage unsichtbar, geht in dieser Zeit über die Linie Erde—Sonne hinweg (untere Konjunktion) und taucht dann zum ersten Male am östlichen Himmel als Morgenstern (heliakischer Aufgang) aus den Strahlen der Sonne auf. Ihr scheinbarer Lauf ist noch immer nach W. gerichtet, aber mit abnehmender Geschwindigkeit, und am 314.d bei einer westlichen Elongation von 28° kommt sie erneut zum Stillstand. Die rückläufige Bewegung hat 42 Tage gedauert und beträgt etwa 15°. Venus geht wieder nach O. mit anfangs rasch, dann langsam wachsender Geschwindigkeit und erreicht am 364.d ihre größte westliche Elongation von 46° 5′ und eine Geschwindigkeit von 1°. Am 546.d geht sie bei einer Elongation von 10° und einer Geschwindigkeit von 1° 15′ in den Sonnenstrahlen unter, hört auf Morgenstern zu sein (heliakischer Untergang).

Scheinbare (geozentrische) Bahn des Merkur.

Wenn dieser Planet für uns der Sonne am nächsten steht und seine ganze Scheibe beleuchtet ist und zugleich am kleinsten erscheint, so ist seine direkte Bewegung am schnellsten, er entfernt sich am raschesten von W. nach O. von der Sonne fort. Ist er nahezu 23° von ihr entfernt d. h. hat er seine größte Elongation erreicht, so kommt er zur Sonne zurück, obschon seine Bewegung unter den Fixsternen noch immer direkt, wenngleich schon sehr langsam geworden ist. Befindet er sich etwa 18° östlich von der Sonne, so verschwindet seine Bewegung vollständig, er wird stationär, kommt zum Stillstand und wird rückläufig. Seine retrograde Bewegung wird allmählich rascher, er nähert sich der Sonne, bis er in ihren Strahlen verschwindet und für uns unsichtbar wird. Während dieser Zeit hat seine scheinbare Größe zwar zugenommen, aber von seiner Scheibe ist ein immer kleinerer Teil auf der westlichen Seite beleuchtet, bis sie ganz verschwindet. Bald darauf entfernt er sich mit einer immer geringer werdenden Geschwindigkeit von der Sonne nach Westen, bis er in einer westlichen Elongation von 18° wieder zum Stillstand kommt. Wenn er nun trotz einer allmählich schneller werdenden direkten Bewegung 23° von der Sonne nach Westen absteht, so beginnt er, sich ihr immer

schneller zu nähern. Endlich kommt er, wenn seine direkte Bewegung am größten geworden ist, wieder bei der Sonne an. In dieser Zeit ist seine scheinbare Größe geringer geworden, seine östliche Seite aber wird immer stärker beleuchtet.

Infolge dieser Unregelmäßigkeiten (Anomalien) in der Bewegung beschreibt der Merkur Schleifen am Himmel. Die Änderungen der Lichtgestalt sind natürlich erst in der Neuzeit mit dem Fernrohr nachgewiesen worden. Fig. 1 gibt ein Bild solcher Merkur-Schleifen für das Jahr 1907. (Die gerade Linie ist der Himmels-Äquator, die glattverlaufende Wellenlinie die Sonnenbahn oder Ekliptik.)

Die sog. oberen oder äußeren Planeten beschreiben ähnliche, kleinere oder größere Schleifen am Himmel, haben also auch Stillstände, rechtläufige und rückläufige Bewegung, heliakische Auf- und Untergänge. Während aber Merkur und Venus sich nie über ein bestimmtes Maß von der Sonne entfernen, zeigen die oberen Planeten, Mars, Jupiter, Saturn, diese Eigentümlichkeit nicht. Sie können sich bis 180^0 von ihr entfernen und sind dann die ganze Nacht sichtbar, da sie bei Sonnenuntergang aufgehen und bei Sonnenaufgang untergehen. Sie stehen in Opposition zur Sonne. Planet—Erde—Sonne bilden eine gerade Linie. Für Jupiter z. B. ist am 14.^{d} nach der Konjunktion bei e_w (westlicher Elongation) $= 10^0$ heliakischer Aufgang, bei $e_w = 117^0$ am 141.^{d} Stillstand (1. Kehrpunkt), am 200.^{d} bei $e_w = 180^0$ Opposition, am 260.^{d} bei e_o (östlicher Elongation) $= 117^0$ Stillstand (2. Kehrpunkt). Die rückläufige Bewegung ist zu Ende, durchschnittlich $9^0\ 55'$, und dauert im Mittel $119^d\ 15^h$. Die beiden entgegengesetzten Bewegungen vollziehen sich nicht auf dem gleichen Wege, sondern bilden eine Schleife, auch liegt der Punkt der Opposition nicht genau auf der Mitte des rückläufigen Bogens, sondern näher an den 1. Kehrpunkt heran. Am 387.^{d} bei $e_o = 10^0$ heliakischer Untergang, nach weiteren 22 bis 23 Tagen Konjunktion, damit ist der 398,6 Tage umfassende scheinbare Lauf des Jupiter abgeschlossen.

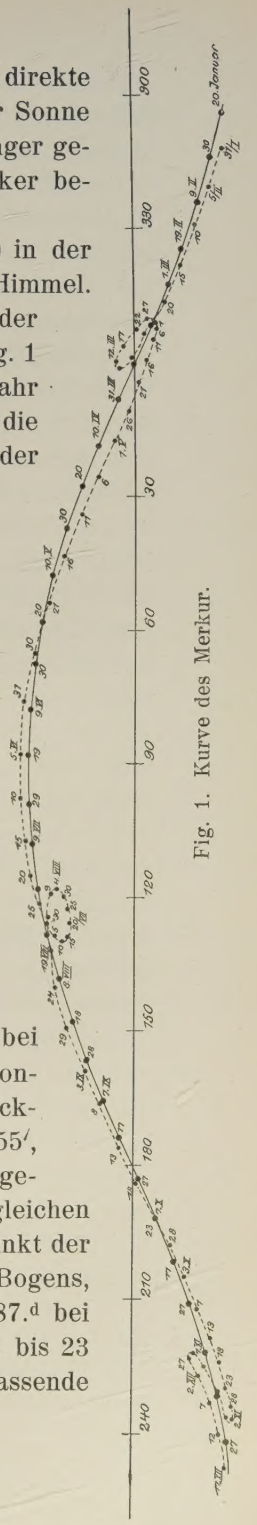

Fig. 1. Kurve des Merkur.

Alle diese Unregelmäßigkeiten waren bereits von den Babyloniern und Ägyptern eifrig beobachtet worden, auch hatten sie gefunden, daß die Planeten nach einer bestimmten Anzahl von vollen Umläufen periodisch dieselben Punkte am Himmelsgewölbe erreichen d. h. wenn sich nach einer bestimmten Anzahl von Umläufen die ersten Schleifen genau deckten, dies auch bei allen folgenden der Fall war. Damit war also eine gewisse Gesetzmäßigkeit in den Unregelmäßigkeiten festgestellt. Ob sie schon Erklärungen für die Unregelmäßigkeiten in den Planetenumläufen aufgestellt oder ein Gesetz gefunden haben, nach welchem durch Aufstellen von Tafeln die Stellungen der Planeten unter den Sternen vorauszubestimmen waren, ist aus den bisher veröffentlichten Nachrichten über die älteste Himmelskunde nicht mit Sicherheit zu erweisen [1]). Der griechische Astronom und Mathematiker Eudoxus von Knidus (geb. um 408) machte den ersten Versuch, eine Planetentheorie auf eine strenge, wissenschaftliche Grundlage aufzubauen. Bis in die Zeit des Plato hinein hatten die Griechen bei Bearbeitung astronomischer und kosmischer Fragen stets die philosophische Methode angewandt; an Erfahrungen, die man gelegentlich gemacht hatte, knüpfte man philosophische Spekulationen an. Für eine gedeihliche Entwicklung der Astronomie war diese Methode nicht günstig, die mathematische oder geometrische Methode mußte an die Stelle der philosophischen treten. Es mußten eigentliche Beobachtungen angestellt und gesammelt werden. Der Punkt der Erde, auf dem der mathematisch geschulte und mit Instrumenten ausgerüstete Beobachter des Himmels steht, muß als relativ unbeweglich angenommen werden, damit man durch immer schärfere Beobachtungen die Fehler der Vorgänger verbessern kann; jede Beobachtung aber muß eingefügt werden können in allgemeine, durch geometrische Gebilde darstellbare und rechnungsmäßig beweisbare Formeln. Plato selbst hatte die Notwendigkeit der mathematischen Methode erkannt, da er den der Sternkunde Beflissenen das Studium der Geometrie dringend anempfahl. Sein Schüler Eudoxus [2]), der auch eine Zeit lang Schüler der ägyptischen

[1]) Vgl. F. X. Kugler, Sternkunde und Sterndienst in Babel. I. Münster 1905. S. 194.

[2]) Vgl. Hultsch, Eudoxus von Knidos mit Literaturangaben. Weltall IV. S. 208 ff.

Priester war, hat seine Untersuchungen und Ansichten über die Ungleichheiten, die in den Bewegungen von Sonne, Mond und Planeten zutage treten, in seinem Werke „Von den Geschwindigkeiten“ niedergelegt. Leider kennen wir davon nur noch Bruchstücke, die uns zum größten Teile Simplicius im 6. Jahrhundert n. Chr. überliefert hat. Mit ihrer Hilfe hat der große Mailänder Astronom Schiaparelli die Theorie des Eudoxus wieder aufgebaut.[1])

Aus ihnen erkennen wir, daß Eudoxus die Planetenbahnen geometrisch durch eine sphärische Lemniskate, deren Mittelpunkt die Sonne ist, nachbildete. Vor allem bereitete ihm die Bahn der Venus, die sich um die Erde bewegen sollte, Schwierigkeiten. In ihrer auf das Firmament projizierten Bahn erkannte er die Form einer Achterlinie, Hippopede, die er als den Schnitt eines ringförmigen „Wulstes“ durch eine Ebene konstruierte. Trotzdem Eudoxus als hervorragender Mathematiker (seine grundlegenden Sätze über Proportionen hat Euklid in das fünfte Buch seiner Elemente aufgenommen, auch seine Lehre von den regelmäßigen Polyedern, sowie seine Sätze über spirische Schnitte benutzt) in scharfsinniger Weise seine Untersuchungen anstellte, vermochte seine Theorie nicht für längere Zeiten mit den beobachteten Stillständen und Retrogradationen der Planeten in Übereinstimmung zu bleiben. Die Unzulänglichkeit der Eudoxischen Theorie führte dazu, daß die Astronomen eine Zeitlang still beobachteten, Material sammelten, um eine neue lebensfähigere Theorie aufzustellen. Vor allen hat der große Aristoteles (384—322)[2]) stets die Notwendigkeit betont, erst fleißig zu beobachten, die Beobachtungen anderer zu sammeln, bis man den ganzen Umfang der Erscheinungen kennen gelernt habe, und dann erst zu versuchen, auf Grund all dieser Beobachtungen ein System zu bauen. „Noch sind die Erscheinungen nicht hinreichend erforscht; wenn sie es aber dereinst sein werden, alsdann ist der Wahrnehmung mehr zu trauen als der Spekulation und letzterer nur in soweit, als sie mit den Erfahrungen Übereinstimmendes gibt.“ Noch durch eine andere Forderung ist der große Stagirite von dauerndem Einflusse auf die spätere Entwicklung der Astromonie gewesen. Nach ihm gibt es nur eine vollkommene,

[1]) Vgl. G. V. Schiaparelli, Über die homozentrischen Sphären des Eudoxus, Kalippus und Aristoteles. Übersetzt von W. Horn in der Zeitschrift für Mathematik. Jahrgang 1877. [2]) Metaphys. XI, 8.

die gleichmäßige und kreisförmige, und eine unvollkommene Bewegung, die gradlinige von oben nach unten. Andere Bewegungen haben die Körper von Natur aus nicht, sie können ihnen nur von außen durch Gewalt mitgeteilt werden. Nun sollen alle Bewegungen am Himmel durch gleichmäßige und kreisförmige erklärt werden; die Erdkugel aber sollte im Mittelpunkte des Weltalls ruhen und keinerlei Bewegung haben [1]). Diese zwei Axiome erhielten eine solche autoritative Geltung, daß kein Astronom wagen durfte, an ihrer Richtigkeit und Wahrheit zu zweifeln. Nach dem Tode des Aristoteles mögen wohl eine oder die andere Theorie noch aufgestellt worden sein, aber es ist von ihnen nichts erhalten geblieben, sie waren sicher nicht lebensfähig. Dagegen beginnt nun ein Zeitraum des Beobachtens und des fleißigen Sammelns von seiten der Astronomen, um Material herbeizuschaffen, mit dem man an eine durchgreifende Reform der theoretischen Himmelskunde herangehen könnte. Diese wissenschaftliche Tätigkeit wurde hauptsächlich in einer Schule gepflegt, die nach ihrem Hauptsitz die alexandrinische genannt wird. In Alexandrien, das Alexander zu einer ähnlichen bedeutenden Stellung erheben wollte, wie sie Athen in Europa einnahm, förderten die Ptolemäer die Wissenschaften, gründeten Bibliotheken, machten diese Stadt in politischer und wissenschaftlicher Hinsicht zum Sammelpunkt bedeutender Männer. Hier wurde nebst Mathematik und Mechanik vor allem die Astromonie gepflegt. Die Methode der wissenschaftlichen Astronomie zu Alexandrien ist die der reinen Empirie, nicht mehr die der Spekulation. Zu den ersten Beobachtern dieser Schule gehören Aristyll und Timocharis (um 294 v. Chr.) an, besonders aber ist Aristarch von Samos [2]), der Begründer des heliozentrischen Systems, Eratosthenes (276—194 v. Chr.) und Apollonius von Pergä (um 247 v. Chr.) zu nennen. Letzterer begründete die mathematische Theorie der Epizykeln. Hipparch (160—125 v. Chr.) wandte dann die Lehren vom exzentrischen Kreise und Epizykel zum ersten Male an, um eine Erklärung für die Ungleichförmigkeiten der Bewegungserscheinungen der Himmelskörper zu gewinnen. Es gelang ihm

[1]) Vgl. Geminos, Elementa astron. Leipzig, Teubner, 1898, S. 11.

[2]) Vgl. Th. Bergk, A. von S., in fünf Abhandlungen zur Geschichte der griechischen Philosophie und Astronomie, Leipzig 1883.

dies für Sonne und Mond in vorbildlicher Weise [1]). Die Beantwortung der Frage Platons: *τίνων ὑποθεισων ὁμαλῶν καὶ τεταγμένων κινήσεων διασωθῇ τὰ περὶ τὰς κινήσεις τῶν πλανωμένων φαινόμενα* [2]) wollte ihm anscheinend für die übrigen wandelnden Himmelskörper nicht gelingen. Es war zwar möglich, ihre zodiakale Ungleichheit durch einen exzentrischen Kreis und ihre Elongationen von der Sonne durch einen Epizykel darzustellen, aber zu einer exakten Bahnbestimmung reichte dies nicht aus, so sehr man auch darauf bedacht war, die numerischen Elemente in der Theorie den Beobachtungen entsprechen zu lassen. Das Verdienst, die Theorie der Planeten, besonders des Merkur, der die größten Verschiedenheiten in seiner Bahn aufwies, in strenger und erschöpfender Weise ausgebildet und zur Darstellung gebracht zu haben, gebührt dem großen Alexandriner Claudius Ptolemaeus (bis 140 n. Chr.). Seine Planetentheorien sind enthalten in seinem großen Werke: *Μαθηματικη συνταξις*, das alles Wissen seiner Zeit auf dem Gebiete der Astronomie und Geographie uns ausführlich überliefert.

An Ausgaben dieses Werkes, des Almagest, sind zu erwähnen: Simon Grynäus, Basel 1538; M. Halma, Paris 1813, 1816; J. L. Heiberg, Leipzig 1898 1903; Karl Manitius, Leipzig, 1912 und 1913 „Ptolemaeus Handbuch der Astronomie". Die kritischen Arbeiten Delambres (Histoire de l'ancienne astronomie, Paris 1817) werden den Verdiensten des Ptolemaeus nicht in allem gerecht, lassen es an manchen Stellen an der nötigen Sorgfalt und Objektivität fehlen. Auch P. Tannery (Recherches sur l'histoire de l'astronomie, Paris 1893) gibt vor allem keine rechte Darstellung der Merkurtheorie des Ptolemaeus, weil er nicht den Almagest, sondern spätere Kommentare desselben seinen Ausführungen zu Grunde legt. Eine bessere und gründlichere Darstellung der Planetentheorien des Ptolemaus gibt N. Herz in seiner „Geschichte der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen", I. Leipzig 1887, S. 107—161.

Im folgenden soll nun dargestellt werden, wie Ptolemäus die Theorie der unteren Planeten, Merkur und Venus, mit den ihm zu Gebote stehenden Hilfsmitteln behandelte, welche Ergebnisse seine Untersuchungen zeitigten und welche Genauigkeit ihnen zuerkannt werden muß. Die Venustheorie ist gewählt, weil sie mit ihrer geringen Exentrizität ein wahres Idealbild des Epizykels gibt, sie hat auch die Zweiteilung der Exzentrizität

[1]) Vgl. Manitius, Hipparchs Theorie der Sonne nach Ptolemaeus. Weltall VI, S. 323, 340; Hipparchs Theorie des Mondes nach Ptolemaeus. Weltall VIII, S. 1, 26, 45.

[2]) Vgl. Simplicius zu Aristoteles de coelo f. 119. Überweg-Heinze, Grundriß der Geschichte der Philosophie I. 10. Aufl., S. 187.

geliefert, aus der Kepler später das Flächengesetz ableitete [1]). Die Merkurtheorie aber mit ihrer starken Exzentrizität ist die schwierigste aller Planetentheorien des Ptolemäus [2])

2. Die mittlere zodiakale und anomalistische Bewegung des Merkur und der Venus.

Was die Geschwindigkeit der Planeten in ihrer scheinbaren Bahn angeht, so müssen zunächst diejenigen Perioden ermittelt werden, in denen die Erscheinungen annähernd gesetzmäßig wiederkehren. Man unterschied zwei voneinander unabhängige, mittlere Bewegungen der Planeten. Die erste ist die sogenannte zodiakale Umlaufszeit, für Venus und Merkur gleich einem Jahr; die mittlere zodiakale Bewegung des Merkur und der Venus stimmen daher mit derjenigen der Sonne überein, die von der Erde ausgehende Richtung nach dem mittleren Orte der unteren Planeten fällt mit derjenigen nach dem mittleren Sonnenorte zusammen, die Sonnentafeln gelten drum auch für die mittlere zodiakale Bewegung dieser beiden Planeten. Die zweite mittlere Bewegung umfaßt die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Retrogradationen. Ptolemäus gibt als Beobachtung des Hipparch an, daß Merkur in 46 Sonnenjahren $1^1/_{30}$ Tagen 46 Umläufe in der Ekliptik plus 1^0 ausführt ($46^a + 1^d 2' = 46^u + 1^0 = 145^w$) und in dieser Zeit 145 mal retrograd erscheint oder 145 Wiederkehren in Anomalie vollzieht, ebenso für Venus, daß dieser Planet in 8 Sonnenjahren weniger $2^3/_{10}$ Tagen 8 Umläufe in der Ekliptik weniger $2^0\,15'$ ausführt und in dieser Zeit 5 mal retrograd erscheint oder 5 Wiederkehren in Anomalie vollzieht. ($8^a - 2^d 18' = 8^u - 2^0\,15' = 5^w$). Da Ptolemäus (Almag. III. 1.) das Sonnenjahr zu $365^d\ 5^h\ 55^m\ 14''\ 48''' = 365{,}2467$ Tagen erhalten hatte, so erhalten wir, wenn wir mit dieser Zahl in die 360 Grade der Ekliptik dividieren, die mittlere Bewegung der Sonne, des Merkur und der Venus für einen Tag:

$$0^0\ 59'\ 8''\ 17'''\ 13^{IV}\ 12^V\ 31^{VI} = 0^0{,}985\,635\,2784$$

[1]) Vgl. Foerster, Ptolemaeus und Kepler, Weltall III. S. 1 ff.

[2]) Vgl. P. Boelk, Darstellung und Prüfung der Merkurtheorie des Claudius Ptolemaeus, Dissertation, Halle 1911. Leverrier, Annales de l'observ. imp. de Paris 1859. XV. S. 1.

für eine Stunde:

$0^0\ 2'\ 27''\ 50'''\ 43^{IV}\ 3^V\ 1^{VI} = 0^0{,}0410681366$

für ein ägyptisches Jahr zu 365 Tagen:

$359^0\ 45'\ 24''\ 45'''\ 21^{IV}\ 8^V\ 35^{VI} = 359^0{,}756876\,6314$

und für einen Zyklus von 18 ägyptischen Jahren, nachem die ganzzahligen Vielfachen von 360^0 subtrahiert sind,

$355^0\ 37'\ 25''\ 36'''\ 20^{IV}\ 34^V\ 30^{VI} = 355^0{,}623779\,3654.$

Ptolemäus gibt nun als Epoche an, daß am 1. Thot des Jahres 1 Nabonassar um Mittag = 26. Februar, — 746 (julian. Stil) der mittlere Ort der Sonne, des Merkur und der Venus auf $0^0\ 45'$ Fische $= 330^0\ 45'$ fiel. Nach dieser Angabe läßt sich mit Hilfe der oben gegebenen Zahlenwerte zu jeder gegebenen Beobachtungszeit der mittlere Ort für jedes der drei Gestirne angeben.

Ursprünglich hatte man aus Beobachtungen von Nachtgleichen und Sonnenwenden, die nicht allzuweit auseinander lagen, die Länge des Jahres auf $365\frac{1}{4}^d$ festgestellt. Da kam nach der Entdeckung der Präzession der Nachtgleichen Hipparch auf den Gedanken, aus möglichst weit auseinander liegenden, aber zuverlässig überlieferten Beobachtungen von Nachtgleichen und Wenden die Länge des tropischen Jahres zu ermitteln. So fand er, daß der Wert $365\frac{1}{4}^d$ nicht genau sein könne, denn ein von ihm im Jahre 134 v. Chr. beobachtetes Sommersolstitium trat um einen halben Tag früher ein, als er es aus einem vor 145 Jahren von Aristarch beobachteten Solstitium abgeleitet hatte. Es mußte das zu $365\frac{1}{4}^d$ angenommene Jahr um den 145. Teil eines halben Tages oder um $4^m\ 50^s$ zu groß sein. Er fand also die Länge des tropischen Jahres zu $365^d\ 5^h\ 55^m\ 10^s$. Der heutige Wert ist $365^d\ 5^h\ 48^m\ 46^s$, das Ergebnis des Hipparch, das nur um etwa 6^m abweicht, ist ein hervorragender Beobachtungserfolg. Ptotemäus hat später kein besseres Ergebnis aufzuweisen, obschon er die Zwischenzeit zwischen zwei Beobachtungen noch größer nahm. Er wählte ein von Hipparch im Jahre 146 v. Chr. und ein von ihm selbst im Jahre 140 n. Chr. beobachtetes Herbstäquinoktium aus. Dies war eine Zwischenzeit von 285 ägyptischen Jahren ($= 365^d$) und $70\frac{6}{20}$ Tagen. Er fand die Länge des tropischen Jahres zu $365^d\ 5^h\ 55^m\ 12^s$. (Almag. III., 1.)

Das Jahr, nach welchem Ptolemäus (wie Hipparch) in seinen Ephemeriden rechnet, ist das ägyptische Wandeljahr, welches den Vierteltag vernachlässigt. Es hatte 12 Monate zu 30 Tagen und 5 Zusatztage. Da die alten Astronomen den Tag dem Grade entsprechend in 60 erste Teile und jeden dieser wieder in 60 zweite Teile zerlegten, so lautet das Ergebnis des Ptolemäus in dieser Form $365^d\ 14'\ 48''$. Mit der so gewonnenen Zahl der Jahreslänge dividierte Ptolemäus in die 360 Grade des Kreises und fand

die tägliche mittlere Bewegung	=	$0^0\ 59'\ 8''\ 17'''\ 13''''\ 12'''''\ 31''''''$
die stündliche „ „	=	$0^0\ 2'\ 27''\ 50'''\ 43''''\ 3'''''\ 1''''''$
die monatliche „ „	=	$29^0\ 34'\ 8''\ 36'''\ 36''''\ 15'''''\ 30''''''$
die jährliche „ „	=	$359^0\ 45'\ 24''\ 45'''\ 21''''\ 8'''''\ 35''''''$

Auf Grund dieser bis zu den Sexten genau berechneten Beträge stellte Ptolemäus fünf Tafeln auf, aus denen für jeden beliebigen in Jahren, Tagen und Stunden ausgedrückten Zeitabschnitt die einzelnen Beträge zu entnehmen sind, durch deren Addition der Gesamtbetrag erhalten wird. Diese fünf Tafeln für mittlere Bewegung weisen für Sonne, Merkur und Venus die gleichen Beträge auf. Mit Hilfe dieser Tafeln mußte man nun einen möglichst weit zurückliegenden Anfangstermin der mittleren Bewegung für Sonne, Merkur und Venus feststellen und Jahr, Tag und Stunde genau angeben. Denn Beobachtungen, die nach verschiedenen Zeitangaben datiert waren, konnten nur dann in Beziehung zu einander gebracht werden, wenn sie auf eine gemeinsame Ära reduziert waren. Nun datierten die griechischen Astronomen ihre Beobachtungen entweder nach athenischen Archonten oder nach Kallipischen Perioden zu 76 Jahren oder nach Jahren seit dem Tode Alexanders des Großen[1]), die römischen die ihrigen nach der Augustischen Ära d. i. nach Regierungsjahren der römischen Kaiser, während die Chaldäer die Nabonassarische Ära anwandten. Letztere als die am weitesten zurückgehende war die geeignetste. Der Anfang dieser Ära fällt auf den 1. Thot des 1. Regierungsjahres Nabonassars d. i. auf den Neujahrstag des ägyptischen Wandeljahres, in welchem Nabonassar die Regierung antrat. Es ist der 26. Februar 747 v. Chr. Die Tage des ägyptischen Jahres sind Thot 30, Phaophi 60, Athyr 90, Chojak 120, Tybi 150, Mechir 180, Phamenoth 210, Pharmuthi 240, Pachon 270, Payni 300, Epiphi 330, Mesore 360 und 5 Zusatztage. Das erste Jahr der Nabonassarischen Ära beginnt also am 26. Februar 747 v. Chr., mittags wahrer Zeit, bezogen auf den Meridian von Alexandrien, das zweite am 26. Februar 746, das dritte am 26. Februar 745, das vierte am 26. Februar 744, das fünfte aber am 25. Februar 743, denn das Jahr 744 ist ein Schaltjahr usw. Daher fällt der

1. Thot	484	Nabonassar	auf	264	Oktober	28 v. Chr.
„	488	„	„	260	„	27 „
„	492	„	„	256	„	26 „
„	496	„	„	252	„	25 „
„	500	„	„	248	„	24 „
„	504	„	„	244	„	23 „
„	876	„	„	128	Juli	22 n. Chr.
„	880	„	„	132	„	21 „
„	884	„	„	136	„	20 „
„	888	„	„	140	„	19 „
„	892	„	„	144	„	18 „

Auch rechnet Ptolemäus noch nach Dionysischen Jahren; diese Ära beginnt am 27. Juni 285 v. Chr. (Sommerwende.)[2])

Für die mittlere Bewegung in Anomalie (d. i. des Planeten auf dem Epizykel) gibt Ptolemäus bei Merkur an, daß in 46 Sonnen-

---

[1]) Vgl. die Ärentafel im Hdb. d. klass. Altertumsw., hgg. von Iwan Müller, I. Bd., S. 655 ff.

[2]) Vgl. Manitius, Ptolemäus Handbuch der Astronomie, II., Leipzig 1913, S. 405—407 und Böckh, Sonnenkreise der Alten, Berlin 1863, S. 286—340.

jahren $1^1/_{30}$ Tagen ungefähr 145 Restitutionen der Anomalie stattfinden. Verwandelt man die Sonnenjahre in Tage und teilt den Umlauf der Anomalie in 360^0, so sind beim Merkur $16802^d\ 22'\ 48'' = 52200^0$. Für die Aufstellung von Tafeln nimmt Ptolemäus den genaueren Wert $16802^d\ 24'$, den er aus der Beobachtung erhält, daß in 402 ägyptischen Jahren 283 Tagen $13^1/_2$ Stunden 1268 volle Umläufe $+ 246^0\ 53'$ stattfinden. Damit ergibt sich die tägliche mittlere Bewegung des Merkur

in Anomalie $= 3^0\ 6'\ 24''\ 6'''\ 59^{IV}\ 35^V\ 50^{VI}$
in einer Stunde $= 0^0\ 7'\ 46''\ 0'''\ 17^{IV}\ 28^V\ 59^{VI}\ 35^{VII}$
in einem ägyptischen Jahre $= 53^0\ 56'\ 42''\ 32'''\ 32^{IV}\ 59^V\ 10^{VI}$
in dem Zeitraum von 18 ägyptischen Jahren $= 251^0\ 0'\ 45''\ 45'''\ 53^{IV}\ 45^V\ 0^{VI}$

Für Venus findet Ptolemäus in 7 Jahren 362 Tagen 16,8 Stunden nach 5 Restitutionen der Anomalie 8 Umläufe weniger $2^0\ 15'$, es sind also bei der Venus $2919^d\ 40' = 1800^0$. Hiermit findet er für die Venus die tägliche mittlere Bewegung

in Anomalie $= 0^0\ 36'\ 59''\ 25'''\ 53^{IV}\ 11^V\ 28^{VI}$
in einer Stunde $= 0^0\ 1'\ 32''\ 28'''\ 34^{IV}\ 42^V\ 58^{VI}\ 40^{VII}$
in einem ägyptischen Jahre $= 225^0\ 1'\ 32''\ 28'''\ 34^{IV}\ 39^V\ 15^{VI}$
in dem Zeitraum von 18 ägyptischen Jahren $= 90^0\ 27'\ 44''\ 34'''\ 23^{IV}\ 46^V\ 30^{VI}$

In seinen „Hypothesen", einem Werke, das später als der Almagest verfaßt ist, gibt Ptolemäus andere Zahlen. Hiernach vollführt Venus in 964 Sonnenjahren = 964 ägyptischen Jahren 247^d,5672 603 Restitutionen der Anomalie und Merkur in 993 Sonnenjahren = 993 ägyptischen Jahren 255^d,0144 3130 Restitutionen der Anomalie. Hierbei stützt sich Ptolemäus vielleicht auf chaldäische und ägyptische Überlieferungen und wird durch die fast tausendjährige Beobachtungszeit in die Lage versetzt, eine Verminderung der Fehler herbeizuführen.

In seiner Schrift: „Mémoire sur la théorie de Mercure"[1]) behauptet La Lande, die von Ptolemäus gefundene mittlere anomalistische Bewegung des Merkur sei jährlich um 15'' fehlerhaft, verglichen mit der der anderen Planeten; jedoch hat La Lande diesen Einwand später widerrufen.

---

[1]) Vgl. Mémoires der Pariser Akademie, 1766.

3. Der exzentrische Kreis.

Der Anblick des sich anscheinend in 24 Stunden um die Achse der Weltkugel drehenden Fixsternhimmels hatte schon früh die Forderung einer Kreisbahn für alle Himmelskörper nahegelegt. Seit Aristoteles bestand für die Erklärung himmlischer Bewegungen als Grundprinzip die Forderung, sie durch regelmäßige Kreisbewegungen zu erklären. Man schrieb den Gestirnen eine einzigartige Vollkommenheit zu [1]), so daß für die Erklärung ihrer Bahnen auch nur die einfachste und zugleich gleichförmigste Bewegung, nämlich die auf einem Kreise, herangezogen werden durfte. Trotzdem die Schule der Pythagoräer, trotzdem Philolaos, Aristarchos der Erde bereits ihre Zentralstellung genommen und ihr eine jährliche Bewegung um ein Zentralfeuer gegeben hatte, blieb dennoch die Aufgabe bestehen: Auch für die Wandelgestirne sollen kreisförmige Bahnen um die in einer gwissen Zentralstellung ruhende Erde vorausgesetzt werden und alle Ungleichheiten in ihrer Bahn sollen durch diese Voraussetzungen erklärt werden. Zwei Annahmen standen nun den alten Astronomen als völlig gleichwertig zu Gebote: entweder durchliefen die Planeten einen zur Erde konzentrischen Kreis mit einer Geschwindigkeit, welche um einen von dem Zentrum verschiedenen Punkt gleichförmig erfolgte, oder sie bewegten sich in einem zur Erde exzentrischen Kreise mit einer konstanten Geschwindigkeit um den Mittelpunkt. Beide Annahmen wurden der Erscheinung gerecht, daß die Planeten in gleichen Zeiten ungleiche Bogen am Himmel beschreiben, und daß die größte und kleinste Bewegung von der Erde aus gesehen sich diametral gegenüber liegen. Die Alten bevorzugten wegen ihrer Einfachheit die zweite, die Annahme des exzentrischen Kreises. Diese Theorie war zur Zeit des Ptolemäus bereits eine der Hauptlehren der Astronomie. Er verwendet sie drum auch in seiner Planetentheorie.

Fig. 2 Man denke sich in der Ebene der Ekliptik um einen Punkt M mit einem genügend großen Radius einen Kreis beschrieben, der den Mittelpunkt E der Erde, das centrum visionis, umschließe; auf dem Umfange dieses Kreises bewege sich im Sinne der Zeichen mit gleichförmiger Bewegung ein Himmelskörper P. Die Verbindungslinie der Punkte M und E schneidet den Kreis

[1]) Vgl. Almagest, lib. IX. c. 2.

um M in A und A′, dem Apogäum und Perigäum, und bildet eine Symmetrieachse der Bahn des Himmelskörpers. Während von M aus gesehen P in gleichen Zeiten gleiche Bogen der Ekliptik durchläuft, erscheint seine Bewegung in E ungleichförmig und bald zunehmend, bald abnehmend in seiner Geschwindigkeit. Die gleichmäßige Bewegung um M oder die mittlere wird gemessen durch $\sphericalangle$ A M P oder A M P_m, die ungleichmäßige um E oder die scheinbare durch $\sphericalangle$ A E P oder $\sphericalangle$ A E P_s, ihr Unterschied durch $\sphericalangle$ P_m P P_s oder $\sphericalangle$ M P E, die sogenannte Mittelpunktsgleichung.

Betrachtet man von E aus zwei Lagen von P und P^1 des Planeten, so daß P M P^1 eine gerade Linie bilden und P P^1 nicht mit A A′ zusammenfällt, dann gelten folgende Beziehungen:

$$\sphericalangle \text{ AMP} > \sphericalangle \text{ AEP um } \sphericalangle \text{ MPE},$$
$$\sphericalangle \text{ A'MP}^1 < \sphericalangle \text{ A'EP}^1 \text{ um } \sphericalangle \text{ MP}^1\text{E},$$

und da $\sphericalangle$ A M P = $\sphericalangle$ A′ M P^1 ist, so ist $\sphericalangle$ A E P < $\sphericalangle$ A′ E P^1. Es erscheinen also für einen Beobachter in E die gleichen Bogen A P und A′ P^1 in E unter verschiedenen Winkeln, es scheint der Planet sich in der Nähe des Apogäums langsamer, in der Nähe des Perigäums rascher zu bewegen.

Nimmt man zwei andere Lagen des Planeten in seiner Bahn P^2 und P^3, so daß P^2 E P^3 eine gerade Linie bilden, so sind die Mittelpunktsgleichungen entgegengesetzt gleich. Sie erreichen ihren größten Wert in den Lagen P^4 und P^5, wenn P^4 E P^5 eine gerade Linie bilden und in E auf A A′ senkrecht sind, oder wenn P^4 P^5 die kürzeste durch E gehende Sehne des Kreises um M ist, oder wenn der Planet dem Beobachter 90^0 östlich oder westlich von Apogäum entfernt scheint.

Zwischen Apogäum und Perigäum liegt der scheinbare Ort des Planeten P_s hinter dem mittleren P_m zurück, zwischen dem Perigäum und dem Apogäum liegt der mittlere Ort hinter dem scheinbaren zurück. In dem ersteren Bereich muß man also von dem mittleren Orte des Planeten den Betrag der Mittelpunktsgleichung abziehen (ἀφαιρεσις), um den scheinbaren Ort zu erhalten, in dem zweiten muß man zu dem mittleren Orte des Planeten den Betrag der Mittelpunktsgleichung hinzusetzen (προσθεσις), um den scheinbaren Ort zu erhalten. Daher führt die Mittelpunktsgleichung oder Anomaliedifferenz auch den Namen

Prosthapheräse. Im Apogäum und Perigäum ist der Betrag der Mittelpunktsgleichung gleich Null.

Ptolemäus zeigt durch eine einfache geometrische Betrachtung, daß die Mittelpunktsgleichung für die Lagen P^4 und P^5 ihren größten Wert annimmt, und man erkennt daraus, wie die Alten Maximum- und Minimumaufgaben zu behandeln pflegten. Angenommen $\widehat{AP}^6$ sei im Sinne der wachsenden Zeichen kleiner als $\widehat{AP}^4$. Dann ist $P^6E > EP^5$, folglich $\sphericalangle P^6P^5E > \sphericalangle P^5P^6E$. Da $\sphericalangle P^6P^5M = \sphericalangle P^5P^6M$ ist, so ist auch $\sphericalangle EP^5M > \sphericalangle EP^6M$, oder $\sphericalangle EP^4M > \sphericalangle EP^6M$.

Ebenso läßt sich zeigen, daß dieselbe Ungleichheit besteht, wenn der Ort des Planeten sich zwischen P^4 und A' befindet.

4. Der Epizykel.

Der exzentrische Kreis reichte aus, um die einfachsten Unregelmäßigkeiten in den Bahnen himmlischer Körper genähert darzustellen, sofern es sich um solche Erscheinungen handelte, die sich periodisch wiederholen. So hatte diese Hypothese bei der Sonnentheorie gute Dienste geleistet. Aber für den Mond und die Planeten bedurfte sie einer Erweiterung. Diese Erweiterung oder Verallgemeinerung der Theorie des exzentrischen Kreises nennt man Epizykelntheorie. Schon Apollonius[1]) hatte nämlich den Mittelpunkt des exzentrischen Kreises als beweglich angesehen und ihn in einem Kreise mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die Erde geführt. Dieser bewegliche exzentrische Kreis führt den Namen Epizykel, der Kreis, auf dem sich der Mittelpunkt des Epizykels bewegt, heißt Deferent. Von dieser Annahme hatte schon Hipparch bei seiner Sonnentheorie Gebrauch gemacht, und Apollonius selbst hatte schon früher auf die Möglichkeit hingewiesen, die Schleifen in den Bahnen der Planeten durch Epizykeln zu erklären. Auf beide sich stützend baute Ptolemäus ihre Ansichten aus und entwickelte seine Epizykelntheorie. Sie machte er zur wissenschaftlichen Grundlage seines ganzen Systems.

Fig. 3a u. b

Auf dem Kreise um E, dem Deferenten, bewegt sich der mittlere Planet P_m mit gleichförmiger Geschwindigkeit im Sinne der Zeichen, der scheinbare Planet P_s befindet sich bald rechts, bald links von diesem mittleren Orte, er bewegt sich in einem

[1]) Vgl. S. 12.

Kreise um diesen mittleren Ort. Befindet sich der Planet in P_s, so ist, bezogen auf einen festen Durchmesser $A A'$ des Deferenten, $\sphericalangle$ $A E P_m$ seine mittlere Bewegung, $\sphericalangle$ $A E P_s$ seine scheinbare Bewegung und $\sphericalangle$ $P_m E P_s$ die Mittelpunktsgleichung. Ist der Planet in der Verlängerung von $E P_m$ in B oder B', so fällt die Richtung von dem Beobachter aus nach dem scheinbaren Orte des Planeten mit der nach seinem mittleren Orte zusammen, aber die Geschwindigkeit des Planeten ist in beiden Fällen nicht dieselbe. Es sei μ_e die Geschwindigkeit des Planeten im Epizykel, μ_d die des Epizykelmittelpunktes im Deferenten, und geht die Bewegung beider nach wachsenden Längen vor sich, so ist die Geschwindigkeit des Planeten in B gleich $\mu_e + \mu_d$, in B' aber gleich $\mu_d - \mu_e$. Ist der Planet in der Richtung der Tangente an den Epizykel in C oder C', so ist seine Geschwindigkeit $\mu_e = \mu_d$, also gleich der mittleren des Epizykelmittelpunktes. Ist der Planet aber in P_s z. B., so gibt $\sphericalangle$ $P_s E P_m$ die Abweichung von diesen Werten an. Ist der Betrag dieser Mittelpunktsgleichung ein Minimum, so befindet sich der Planet in B, im Apogäum des Epizykels, oder in B', im Perigäum des Epizykels, je nachdem die Anomalie des Planeten im Epizykel, $\sphericalangle$ $P_s P_m B$, 0^0 oder 180^0 beträgt. Eine Wiederholung dieser Erscheinungen tritt ein, sobald die Anomalie des Planeten im Epizykel um ganzzahlige Vielfache von 2π gewachsen ist. Nehmen wir an, daß der Radius des Epizykels kleiner als der des Deferenten ist, wie es bei den Planeten der Fall ist, so erreicht die Mittelpunktsgleichung ihr Maximum, wenn der Planet in C oder C' ist, oder die Elongation des Planeten von seinem mittleren Orte erreicht ihren größten Wert in der Richtung der Tangenten von E aus an den Epizykel. In C haben wir die größte westliche, in C' die größte östliche Elongation des Planeten, die einen gewissen Wert bei Venus und Merkur nie überschreiten. In der Nähe des Epizykelperigäums B' überwiegt die Anomalie gegenüber der zodiakalen Bewegung des Punktes P_m, und es gibt nun auf beiden Seiten von B' einen Punkt, für den der Planet im Stillstande erscheint, F und F'. Befindet sich der Planet auf dem Bogen $F B' F'$, so ist seine Bewegung rückläufig, befindet er sich auf dem Bogen $F' B F$, so bewegt er sich rechtläufig. Fig 5

Eine sehr schwierige Aufgabe für die Alten war es nun, diese beiden Stillstandspunkte zu bestimmen und so die Länge

des recht- und rückläufigen Bogens festzustellen. Ptolemäus erzählt [1]), daß Apollonius von Pergä eine Regel hierfür aufgestellt habe. Diese erscheint ihm zu kompliziert, und er gibt dafür teilweise einen neuen Beweis. Apollonius zeigte, daß eine Gerade E F T von dem Auge des Beobachters nach dem Epizykel so gezogen, daß

$$\frac{{}^1/_2 \,\mathrm{T\,F}}{\mathrm{F\,E}} = \frac{\mu_d}{\mu_e}$$

sei, notwendig durch den Stillstandspunkt F gehen muß. Um dies zu beweisen, führt Apollonius zunächst eine andere Betrachtung durch.

Fig. 4 In einem Dreiecke A B C ist B C > C A. Auf B C nimmt man einen Punkt D′ so an, daß D′ C > C A ist, dann ist

$$\frac{\mathrm{C\,D'}}{\mathrm{D'\,B}} > \frac{\sphericalangle\, \mathrm{A\,B\,C}}{\sphericalangle\, \mathrm{A\,C\,B}}.$$

Nun wähle man auf B C den Punkt D so, daß A C = C D ist, vervollständige das Parallelogramm A D C E, verlängere B A und C E bis zum Schnittpunkte F und beschreibe um A mit A C den Kreis, der durch E hindurchgeht und A F in G schneidet.

Es ist nun $\triangle$ A E F > Sektor A E G

$\triangle$ A C E < Sektor A C E,

folglich $$\frac{\triangle\ \mathrm{A\,E\,F}}{\triangle\ \mathrm{A\,C\,E}} > \frac{\text{Sektor A E G}}{\text{Sektor A C E}}.$$

Es verhält sich aber

$$\frac{\triangle\ \mathrm{A\,E\,F}}{\triangle\ \mathrm{A\,C\,E}} = \frac{\mathrm{F\,E}}{\mathrm{C\,E}} = \frac{\mathrm{C\,D}}{\mathrm{D\,B}}$$

$$\frac{\text{Sektor A E G}}{\text{Sektor A C E}} = \frac{\sphericalangle\, \mathrm{E\,A\,G}}{\sphericalangle\, \mathrm{C\,A\,E}} = \frac{\sphericalangle\, \mathrm{A\,B\,C}}{\sphericalangle\, \mathrm{A\,C\,B}}.$$

Mithin ist $$\frac{\mathrm{C\,D}}{\mathrm{D\,B}} > \frac{\sphericalangle\, \mathrm{A\,B\,C}}{\sphericalangle\, \mathrm{A\,C\,B}}$$

und, wenn die linke Seite dieser Gleichung noch größer genommen wird, $$\frac{\mathrm{C\,D'}}{\mathrm{D'\,B}} > \frac{\sphericalangle\, \mathrm{A\,B\,C}}{\sphericalangle\, \mathrm{A\,C\,B}}.$$

Fig. 5 Es sei die Gerade E F T nun so gezogen, daß

$$\frac{{}^1/_2 \mathrm{T\,F}}{\mathrm{F\,E}} = \frac{\mu_d}{\mu_e}$$

ist, d. h., daß sich die Hälfte der Sehne T F zu dem äußeren

[1]) Vgl. Almag. XII. 1 ff.

Abschnitte der Sekante FE wie die Geschwindigkeit im Deferenten zu der Geschwindigkeit im Epizykel verhalte. Wenn sich nun der Planet in der Nähe des Punktes F auf der Seite des Apogäums befindet, in P z. B., und nach der Zeit t sich vermöge seiner Bewegung in Anomalie in F und vermöge seiner zodiakalen Bewegung in Q befindet, so ist

$$\sphericalangle \text{PEQ} = t\mu_d \text{ und } \sphericalangle \text{PP}_m\text{F} = t\mu_e.$$

In dem Dreiecke TPE ist ET > TP und FT > TP.

Daher ist nach dem oben Ausgeführten

$$\frac{\text{TF}}{\text{FE}} > \frac{\sphericalangle \text{PET}}{\sphericalangle \text{ETP}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\text{TF}}{\text{FE}} = 2\,\frac{\mu_d}{\mu_e} = 2\,\frac{\sphericalangle \text{PEQ}}{\sphericalangle \text{PP}_m\text{F}} = \frac{\sphericalangle \text{PEQ}}{\sphericalangle \text{ETP}}.$$

Setzt man den letzten Wert ein, so ist, da die Nenner gleich sind, $\sphericalangle \text{PEQ} > \sphericalangle \text{PET}$.

Ehe der Planet zum Punkte F gelangt, bewegt er sich um den Betrag $\sphericalangle \text{PEQ} - \sphericalangle \text{PET}$ im Sinne der Zeichen, also rechtläufig.

Befindet sich nun der Planet in F und gelangt nach der Zeit t zu dem Punkte P′, ohne das Perigäum zu überschreiten, und vermöge seiner zodiakalen Bewegung nach Q′, so ist

$$\sphericalangle \text{FEQ}' = t\mu_d \text{ und } \sphericalangle \text{FP}_m\text{P}' = t\mu_e.$$

In dem Dreiecke TP′E, in welchem ET > TP′ und FE > EP′ ist, besteht die Gleichung:

$$\frac{\text{EF}}{\text{ET}} > \frac{\sphericalangle \text{ETP}'}{\sphericalangle \text{P}'\text{ET}} \text{ oder}$$

$$\frac{\text{TF}}{\text{FE}} > \frac{\sphericalangle \text{P}'\text{ET}}{\sphericalangle \text{ETP}'}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\text{TF}}{\text{FE}} = 2\,\frac{\mu_d}{\mu_e} = 2\,\frac{\sphericalangle \text{FEQ}'}{\sphericalangle \text{PP}_m\text{F}} = \frac{\sphericalangle \text{FEQ}'}{\sphericalangle \text{ETP}},$$

den letzten Wert eingesetzt, ergibt:

$$\sphericalangle \text{FEQ}' < \sphericalangle \text{FEP}'.$$

Der Planet hat sich in der Zeit t um den Betrag $\sphericalangle \text{FEP}' - \sphericalangle \text{FEQ}'$ gegen die Ordnung der Zeichen, also rückläufig bewegt.

Damit ist der Beweis erbracht, daß die Punkte F und F′, der symmetrisch zu F liegt, die Stillstandspunkte sind, d. h. die die recht- und rückläufige Bewegung des Planeten trennen [1]).

5. Die Theorie der Venus.

Zur Erklärung der Unregelmäßigkeiten in der Bahn der Venus bedient sich Ptolemäus zunächst der Theorie des Epizykels.

O sei der Mittelpunkt eines Kreises, des Deferenten, auf dessen Umfang sich der Mittelpunkt B eines zweiten Kreises, des Epizykels, bewegt. Auf dem Umfange dieses letzteren bewegt sich der Planet. Der Mittelpunkt des Epizykels bewegt sich im Sinne der Zeichen, also nach wachsenden Längen. Nun
Fig. 6 fand Ptolemäus bei der Beobachtung der Bewegung des Planeten auf dem Epizykel, daß er eine weit längere Zeit gebraucht, um von dem Augenblicke seiner schnellsten direkten Bewegung (in der Eigur I) zu seiner größten Elongation von dem mittleren Orte (in III und III′) zu gelangen, als von dieser zu seiner (langsamsten rückläufigen) Bewegung (in II). Wie die Figur zeigt, ist der Bogen III—II kleiner als der Bogen III—I; weil der Planet sich auf dem Epizykel mit gleichmäßiger Geschwindigkeit fortbewegt, müßte er kürzere Zeit gebrauchen, den Bogen III—II zu durchlaufen, als er nötig hat, um den Bogen III—I zurückzulegen. Weil dies den Beobachtungen widerspricht, macht Ptolemäus die Folgerung, daß der Planet in gleichem Sinne, wie der Epizykelmittelpunkt den Deferenten, den Epizykel durchlaufe (in der Pfeilrichtung). Anders ist es in der Theorie des Mondes. Würde Ptolemäus zur Erklärung dieser Unregelmäßigkeit die Theorie des exzentrischen Kreises verwandt haben, so wären die Erscheinungen entgegen der Erfahrung die umgekehrten gewesen.

Das Zentrum des Epizykels bewegt sich nun auf dem Deferenten mit der mittleren zodiakalen Geschwindigkeit, oder mit anderen Worten, die Richtung von der Erde aus nach diesem Epizykelmittelpunkte fällt stets zusammen mit der Richtung nach der mittleren Sonne, während gleichzeitig der Planet gemäß seiner anomalistischen Bewegung den Epizykel durchläuft. Dann

[1]) Eine Darstellung der Epizykelntheorie mit Hilfe der analytischen Geometrie gibt Plassmann in seiner „Himmelskunde“ (2. u. 3. Aufl., Freiburg 1913) S. 142—150.

hätten sich nach jedesmaliger Restitution der Anomalie die Erscheinungen im Epizykel in gleicher Weise immer wiederholen müssen. Nun kann man für die unteren Planeten Merkur und Venus die größten östlichen und westlichen Elongationen des Planeten von seinem mittleren Orte stets direkt beobachten, da fand Ptolemäus, daß diese nicht immer gleich sind. Der Winkel B O III ist verschieden groß, je nach der Lage des mittleren Planetenortes B auf dem Deferenten. Zur Erklärung dieser Ungleichheit bedient sich Ptolemäus der Theorie des exzentrischen Kreises. Er löst den Beobachtungsort (die Erde) los von dem Mittelpunkt des Deferenten und gibt ihm eine exzentrische Lage in E. Nun erscheint der mittlere Planeten-Ort P_m für den Be- Fig. 7
obachter in E in der Richtung ⊙ E, und es werden die größten Elongationen des Planeten von seinem mittleren Orte, der Winkel ⊙ E C, für verschiedene Lagen des Epizykels auf dem Deferenten sich ändern. Die beiden Richtungen O P_m und E ⊙ bleiben sich stets parallel, werden also während eines vollen zodiakalen Umlaufes zweimal zusammenfallen, wenn P_m sich in A oder A′ befindet. In diesen Punkten werden auch die östlichen und westlichen größten Elongationen gleich groß erscheinen. Ihre Verbindungslinie A O E A′ ist die Symmetrieachse des Deferenten d. h. die Elongationen des Planeten erfolgen symmetrisch in bezug auf diese Linie.

Kennt man nun den Winkelabstand dieser Linie von der Richtung nach dem Frühjahrspunkte, ferner die Winkel, unter denen der Epizykel in A und A′ dem Beobachter in E erscheinen, so kann man hieraus das Verhältnis der Radien des Deferenten und Epizykels zueinander so wie Größe und Richtung der Strecke O E (Exzentrizität der Erde) berechnen.

Ptolemäus wird also den beschriebenen Unregelmäßigkeiten in der Bahn der Venus durch eine glückliche Kombination der Theorien des Epizykels und des exzentrischen Kreises gerecht.

Ptolemäus unterzieht nun einige andere Punkte des Deferenten noch einer genaueren Prüfung, um zu sehen, wie weit die zu Grunde gelegten Theorien der Beobachtung genügen. Er betrachtet jene Lagen des Epizykels, in denen P_m um 90^0 von Fig. 8
A, dem Apogäum, entfernt ist, indem er annimmt, daß die Abweichungen der Theorie von der Beobachtung, wenn solche vor-

handen sind, hier am stärksten auftreten. Er findet auch wirklich, daß in diesen Lagen des Epizykels die beobachteten Elongationen, größten östlichen und westlichen, des Planeten von seinem mittleren Orte nicht mit den durch Rechnung gefundenen übereinstimmten. Der größte östliche und westliche Abstand der Venus von dem mittleren Sonnenorte betrug etwa 46^0. Hätte Ptolemäus nun, wie in der Sonnentheorie, so auch bei der Venus den Abstand der Erde vom Mittelpunkt des Venus-Deferenten in einer bestimmten Jahreszeit um $^1/_{25}$ des mittleren Abstandes ($O A = O A'$) größer, in der entgegengesetzten Jahreszeit um $^1/_{25}$ des mittleren Abstandes kleiner angenommen, so mußte der Epizykelhalbmesser im ersten Falle um nahezu $2{,}4^0$ kleiner, im zweiten Falle $2{,}4^0$ größer als 46^0 erscheinen. Er fand aber für Venus nur die Hälfte dieses Betrages und sah sich infolgedessen gezwungen, die Theorie der einfachen Exzentrizität, die bei der Erklärung der Sonnenbahn aufgestellt war, fallen zu lassen und für Venus und die oberen Planeten festzulegen, daß der mittlere Planetenort sich um einen Punkt bewege, der in der Mitte zwischen der exzentrisch gelegenen Erde E und dem sogenannten punctum aequans D befindet. Von diesem letzteren Punkte aus erscheint die zodiakale Bewegung des Epizykelmittelpunktes gleichförmig zu erfolgen. Diese Anordnung der drei Punkte E, O und D, die Theorie der „Zweiteilung der Exzentrizität", ist die zweite Großtat des Ptolemäus; sie ist eigentlich nichts anderes als eine bereits genähert richtige Darstellung der Bewegungsform in der Ellipse, wie sie später Kepler fand; die Punkte E und D, die symmetrisch zum Punkte O, dem Mittelpunkte des Deferenten liegen, stellen eigentlich die beiden Brennpunkte der elliptischen Bahn dar [1]).

6. Die Theorie des Merkur.

Die Behandlung der Bahn des Merkur ist die gleiche, wie bei der Bahn der Venus, bis zur Einführung der Zweiteilung der Exzentrizität. Nach dieser Theorie müßte der Epizykelmittelpunkt im Apogäum A am weitesten von der Erde entfernt sein und im Perigäum A' ihr am nächsten kommen, es müßte daher die Summe der größten östlichen und westlichen Elongationen in A

[1]) Vgl. Boelk, a. a. O., S. 40; Foerster, Ptolemäus u. Kepler, Weltall III, S. 5.

ein Minimum, in A′ ein Maximum werden. Dagegen beobachtete Ptolemäus, daß es in der Bahn des Merkur zwei Punkte zu beiden Seiten des Perigäums gab (in dem Bogenabstand 120^0 vom Apogäum), in denen der Epizykelmittelpunkt der Erde näher ist als im Perigäum A′, weil in diesen Punkten die Summe der größten östlichen und westlichen Elongationen einen größeren Wert annimmt, als im Punkte A′. Um dies zu erklären, nimmt Ptolemäus an, daß der Punkt O, der Mittelpunkt des Deferenten, nicht eine feste Lage, wie bei der Venus, sondern einen mittleren Ort O_m habe, in dem er sich nie befindet, um den sich in einem kleinen Kreise der wahre Mittelpunkt (mit dem Uhrzeiger) gleichmäßig bewege derart, daß stets Fig. 9 $\sphericalangle O_1 O_m O' = \sphericalangle A E \odot$ und $O_m O' + O' P_m = O_m O_1 + O_1 A = O_m O_2 + O_2 A'$ ist. Die Folge davon ist, daß die Bahn, welche der Epizykelmittelpunkt des Merkur beschreibt, nicht mehr ein Kreis ist, sondern eine längliche geschlossene Kurve; sie ist seitlich abgeplattet, aber keine Ellipse, denn sie besitzt nur eine Symmetrieachse A A′. Zwei Punkte der Bahn G und G′ haben die mittlere Entfernung von der Erde E und teilen die Kurve in zwei Hälften, in deren oberen nur Entfernungen vorkommen, die größer sind als die mittlere, während in der unteren nur solche auftreten, die kleiner als die mittlere sind. In der unteren Hälfte gibt es nun zwei Punkte, P_m und P'_m, in denen die Entfernung von der Erde E am kleinsten ist, während sie im Perigäum A′ schon wieder etwas gewachsen ist.

Die aus der Ptolemäischen Theorie des Merkur resultierende Kurve Fig. 14 scheint zuerst von Arzachel (1080 in Toledo) ausgezogen worden zu sein. Sie findet sich in einer durch die Gelehrten des Königs Alfons X. von Castilien ins Spanische übersetzten Schrift des Arzachel in den „Libros del saber de astronomia del Rey D. Alfonso X. de Castilla ect. por D. Rico y Sinobas, Madrid 1863—1867". Diese Figur ist mit den richtigen Zahlenverhältnissen gezeichnet, wodurch die Kurve einer Ellipse sehr ähnlich wird. Sie ist leider vielfach nicht richtig ausgelegt worden, namentlich von Mädler (Gesch. der Himmelskunde), Wolf (Geschichte der Astron.) und Herz (Geschichte der Bahnbest. II.), welche den kleinen Kreis um O_m für das Sonnenzeichen $\odot$ halten[1]).

Diese Häufung von Unregelmäßigkeiten in der Bahn des Merkur im Gegensatz zur Bahn der Venus rührt offenbar von der großen Elliptizität seiner Bahn her. Um dies deutlicher zu veranschaulichen, sei S die Sonne, P die Fig. 10

[1]) Vgl. A. Wegener, Die Alfonsinischen Tafeln für den Gebrauch eines modernen Rechners. Berlin 1905. Die astronomischen Werke Alfons X. in Bibliotheca Mathem. 3. VI. 1905.

nahezu kreisförmige Bahn der Venus, E die elliptische Erdbahn, dann müssen die größten östlichen und westlichen Elongationen der Venus vom wahren Sonnenort immer wieder gleich sein für dieselben Punkte der Bahn; in A erscheint das Maximum, in B das Minimum der größten Elongationen, in E und E' sind sie gleich. Die Richtung des Apogäums gilt für die Erdbahn, die Exzentrizität ist diejenige der Erdbahn. Ist die Bahn des Planeten nun auch elliptisch, jedoch nur gering, so werden, wie die Figur zeigt, und wie es bei der Venus der Fall ist, die Erscheinungen nahezu dieselben sein. Anders jedoch wird es beim Merkur, dessen Bahn stark elliptisch ist. S sei die Sonne, die innere Ellipse die Bahn des Merkur, ACBD sei die kreisförmig angenommene Erdbahn. Ist die Erde in B, so wird die größte Elongation des Merkur vom wahren Sonnenorte α ein Minimum; ist die Erde in A, so wird die größte Elongation des Planeten nicht immer ein Maximum, denn es können auch größere Elongationen φ auf der einen Seite mit kleinerem ε auf der anderen Seite auftreten, so daß nicht immer $\beta > \frac{\varepsilon + \varphi}{2}$ ist. In der Richtung AB werden sich die östlichen und westlichen Elongationen vom wahren Sonnenorte als gleich ergeben, und in gleichen Abständen von AB z. B. in C und C' werden wechselweise die östlichen und westlichen Elongationen (γ oder δ) einander gleich sein. Würde man aber auch noch die Erdbahn elliptisch darstellen, so würde die Sache noch komplizierter werden.

Fig. 11

Für Merkur sind, wenn die Richtung AS nach Widder, BS nach Wage, CS nach Wassermann, C'S nach Zwillinge und DS nach Krebs zeigt, die Werte der Elongationen: $\alpha = 19^0\ 3'$; $\beta = 23^0\ 15'$; $\gamma = 21^0\ 15'$, $\delta = 26^0\ 30'$; $\varepsilon = 20^0\ 15'$; $\varphi\ 26^0\ 15'$ [1]).

7. Die Bahnelemente der Venus.

Zur Bestimmung des Apogäums der Bahn bedient sich Ptolemäus folgenden Satzes: Wenn in zwei Beobachtungen die größten Elongationen des Planeten von seinem mittleren Orte entgegengesetzt gleich sind, so geht die Linie, welche den von den Richtungen nach den mittleren Orten gebildeten Winkel halbiert, entweder durch das Apogäum oder durch das Perigäum. Hierbei standen ihm geeignete ältere Beobachtungen der Venus nicht zur Verfügung, er stützt sich bei diesen Rechnungen darum ganz auf eigene Beobachtungen und einige, die der zu seiner Zeit lebende Mathematiker Theon angestellt hatte.

Im 16. Jahre Hadrians (879 Nabonassar), am Abend des 21. bis zum 22. Pharmuthi = + 132 März 7, abends 7^h beobachtete Theon die Venus in ihrer größten Elongation vom mittleren Sonnenorte. Die Länge der Venus war in Stier $1^0 30'$, die

[1]) Vgl. Valentiner, Handwörterbuch der Astronomie I. S. 41.

mittlere Sonne im Fische $14^0 15'$, die größte östliche Elongation betrug also $47^0 15'$.

Ptolemäus rechnete die Tage astronomisch von Mittag zu Mittag, nicht wie die Ägypter, die den Tag mit Sonnenaufgang beginnen ließen (Ideler, Chronol. I. S. 100f., Ginzel, Chronol. I. Seite 161). Andere rechneten den Tag vom Morgen ab (Wolf, Gesch. d. Astron. S. 5f.) und teilten Tag und Nacht je in 12 Stunden von ungleicher, also wechselnder Länge. Ptolemäus unterscheidet deshalb Äquinoktialstunden (den unseren entsprechend) und „bürgerliche Stunden". Diese sind die 12 Intervalle des Tages und der Nacht, unbekümmert um die jeweilige Länge des Tages und der Nacht. Will man sie miteinander vergleichen, muß man sie erst in Äquinoktialstunden verwandeln. Aber auch diese sind noch von ungleicher Dauer, da Ptolemäus den wahren Sonnentag bei seinen Beobachtungen und Rechnungen zu Grunde legt. Es wäre also noch die Zeitgleichung zu berücksichtigen gewesen, um ein wirklich gleichförmiges Maß zu erhalten, aber diese Korrektion erschien ihm zu unbedeutend, als daß er sie in Betracht ziehen sollte. Nur bei seiner Mondtheorie macht er hiervon eine Ausnahme[1]).

Da für die Berechnungen des Ptolemäus nach den Tafeln als Epoche der Mittag des 1. Thot des 1. Jahres Nabonassar feststeht, so muß der astronomische Tag bei Ptolemäus durch ein doppeltes Datum angegeben werden. Vom ersten Datum umfaßt der astronomische Tag die 6 bürgerlichen Stunden von Mittag bis Sonnenuntergang und die 12 bürgerlichen Stunden der Nacht bis Sonnenaufgang, vom zweiten Datum nur die 6 bürgerlichen Stunden von Sonnenaufgang bis Mittag. Daß die beiden Daten nicht durch die Mitternachtsstunde geschieden werden, hat Böckh[2]) nachgewiesen. Nicht immer wendet Ptolemäus das Doppeldatum an, oft auch das eintägige. Aber für Planetenbeobachtungen, die kurz vor Sonnenaufgang angestellt werden, genügt die Angabe des eintägigen Datums nicht. Da Planetenbeobachtungen stets mit einer Berechnung des jeweiligen Sonnenortes verbunden sind, so wird zur Bestimmung ihrer Zeit in der Regel der astronomische Doppeltag angewendet, welcher keinen Zweifel darüber läßt, daß die Beobachtung in die Morgendämmerung des zweiten Datums fällt. Hieraus ist zu schließen, daß die Zeit der Morgendämmerung grundsätzlich zum Anfang des beginnenden, nicht zum Schlusse des verflossenen Tages gerechnet wird[3]).

Im 4. Jahre Antonins (888 Nabonassar) am 11. bis zum 12. Thot = + 140 Juli 30, morgens $4^h 30^m$ beobachtete Ptolemäus die Venus in ihrer größten Elongation vom mittleren Sonnenorte. Verglichen mit dem mittelsten Knie (ζ) der Zwillinge, von dem sie um eine halbe Vollmondsbreite nordöstlich entfernt war, war die Länge der Venus in Zwillinge $18^0 30'$, der mittlere

[1]) Vgl. P. Kempf, Untersuchungen über die ptolemäische Theorie der Mondbewegung. Berlin 1878. S. 8.

[2]) Vgl. Böckh, Sonnenkreise der Alten. 1863. S. 303 ff.

[3]) Vgl. Manitius, Ptolemäus Handbuch der Astronomie I. S. 431.

Sonnenort Löwe $5^0\ 45'$, also betrug die größte Elongation als Morgenstern $47^0\ 15'$.

Diese beiden Beobachtungen der Venus ergeben als Richtung des Apogäums $\frac{31^0\ 30' + 78^0\ 30'}{2} = 25^0$ Stier.

Im 12. Jahre Hadrians (875 Nabonassar) am 21. bis zum 22. Athyr $= +$ 127 Oktober 11, morgens $6^h\ 30^m$ beobachtete Theon die Venus in ihrer größten Elongation vom mittleren Sonnenorte, der in Wage $17^0\ 52'$ war. Venus blieb um die Länge der Pleias (d. i. $1^0\ 30'$) oder um ihre eigene Größe (d. i. $5'$), also um höchstens $1^0\ 25'$ hinter dem Stern (β) an dem Ende des linken Flügels der Jungfrau östlich zurück, während ihr Vorübergang an dem Stern um Mondbreite weiter nördlich zu erwarten stand [der zeitliche Unterschied zwischen den beiden Beobachtungen beträgt rund 13 Jahre, auf welche genau genommen $0^0\ 7'\ 30''$ Präzession entfallen. Der Sternkatalog gibt die Länge von β Virg. nur $5'$ weiter östlich mit Löwe 29^0 an]. Die Länge der Venus betrug also ohne wesentlichen Fehler Jungfrau $0^0\ 20'$; ihre größte Elongation als Morgenstern war darum $47^0\ 32'$.

Im 21. Jahre Hadrians (884 Nabonassar) am 9. bis zum 10. Mechir $= +$ 136 Dezember 25, abends $6^h\ 30'$ beobachtete Ptolemäus die Venus in ihrer größten Elongation von der mittleren Sonne. Sie stand damals $24'$ westlich von dem Fixstern φ, dessen Ort Wassermann 20^0 ist, also in Wassermann $19^0\ 36'$, die mittlere Sonne in Steinbock $2^0\ 4'$, darum betrug ihre größte Elongation als Abendstern $47^0\ 32'$.

Diese beiden Beobachtungen der Venus ergeben als Richtung des Perigäums $\frac{150^0\ 20' + 319^0\ 36'}{2} = 24^0\ 58'$ Skorpion, also rund 25^0 Skorpion.

Zur Bestätigung dieses Ergebnisses bzw. zur definitiven Feststellung, in welchem Punkte das Apogäum und Perigäum liegt, wählt Ptolemäus nur zwei Beobachtungen, eine eigene und eine von Theon, aus, in denen die Venus in ihrer größten Elongation von dem mittleren Orte der Sonne in 25^0 Stier bzw. 25^0 Skorpion beobachtet war.

Im 13. Jahre Hadrians (876 Nabonassar) am 2. bis zum 3. Epiphi $= +$ 129 Mai 20, morgens 5^h beobachtete Theon Ve-

nus in ihrer größten Elongation von der mittleren Sonne, die in Stier $25^0\ 24'$ war, während die Länge der Venus in Widder $10^0\ 36'$ betrug. Ihre größte Elongation als Morgenstern betrug $44^0\ 48'$.

Im 21. Jahre Hadrians (885 Nabonassar) am 2. bis zum 3. Tybi = + 136 November 18, abends 5^h ergab sich der scheinbare Ort der Venus in Steinbock $12^0\ 50'$, während der mittlere Ort der Sonne in Skorpion $25^0\ 30'$, so daß ihre größte Elongation vom mittleren Orte $47^0\ 20'$ betrug.

Hieraus folgert Ptolemäus, da letzterer Winkel der größere ist, daß das Apogäum in 25^0 Stier, das Perigäum in 25^0 Skorpion ist.

Diese Ergebnisse zieht Ptolemäus nun heran, um die Exzentrizität und das Verhältnis des Epizykelhalbmessers zum Deferentenhalbmesser festzustellen. Es sei O der Mittelpunkt des Deferenten, E die Erde, A das Apogäum, A' das Perigäum, $OA = OA' = r_d = 1$ bzw, 60^p. P_1 bzw. P_2 der Ort der Venus in ihrer größten Elongation von dem mittleren Orte der Sonne im Apogäum bzw. Perigäum, $AP = A'P = r_e$. Es ist Fig. 15

$$\sphericalangle\ P_1 E A = a = 44^0\,48',$$
$$\sphericalangle\ P_2 E A' = b = 47^0\,20'.$$

Bezeichne ich OE mit e, so ist $r_e = (r_d + e) \sin a = (r_d - e) \sin b$.

Hieraus folgt

$$e = \frac{\operatorname{tg} \frac{b-a}{2}}{\operatorname{tg} \frac{b+a}{2}}\, r_d\,;$$

Mit Einsetzung der Werte erhalten wir

$$\log e = 8.32844, \quad e = 0{,}02130 = 1^p\ 16'.7;$$
$$\log r_e = 9.85712, \quad r_e = 0{,}71965 = 43^p\ 10'.7$$
$$\text{für } r_d = 1 = 60^p.$$

Ptolemäus findet $e = 1^p 15'$ und $r_e = 43^p 10'$.

Um den Punkt zu bestimmen, um den die gleichförmige Bewegung der Venus mit zodiakaler Geschwindigkeit erfolgt, benutzt Ptolemäus zwei selbst angestellte Beobachtungen des Planeten.

Im 18. Jahre Hadrians (881 Nabonassar) am 2. bis zum 3. Pharmuthi = + 134 Februar 18 morgens 6^h war der scheinbare Ort der Venus verglichen mit dem Antares Steinbock $11^0\ 55'$,

der mittlere Ort der Sonne Wassermann 25^0 $30'$. Die größte Elongation vom mittleren Orte betrug 43^0 $35'$.

Im 3. Jahre Antonins (887 Nabonassar) am 4. bis zum 5. Pharmuthi = + 140 Februar 18, abends 5^h 30^m stand Venus in Widder 13^0 $50'$ mit Bezug auf den Aldebaran, während der mittlere Ort der Sonne wieder in Wassermann 25^0 $30'$ war. Die größte Elongation vom mittleren Orte betrug nun 48^0 $20'$. Diese beiden Beobachtungen der Venus, bei denen die mittlere Entfernung des Epizykelmittelpunktes vom Apogäum des Deferenten 90^0 beträgt, benutzt Ptolemäus, um nachzuweisen, daß die Differenz zwischen den entgegengesetzten größten Elongationen in dieser Lage des Epizykels dem Doppelten des Maximums der auf die Ekliptik bezogenen Anomalie gleichkommt.

Fig. 15 Die den Epizykel herumführende Leitlinie $D P_m$ soll bis zum Apogäum in Stier 25 noch einen Quadranten zurückzulegen haben, d. h. die Richtung nach P_m bzw. der mittleren Sonne zeige nach Wassermann 25^0 $30'$. Dieser Punkt ist für ein Auge in E und D wegen der großen Entfernung der Ekliptik und der geringen Exzentrizität unterschiedslos, die Parallelen $E\odot$ und $D P_m$ schneiden sich in der Unendlichkeit in Wassermann 25^0 $30'$.

Die entgegengesetzten größten Elongationen des Planeten von der mittleren Sonne sind in $P_ö$ und P_w. Für das Auge des Beobachters in E liegt der Epizykelmittelpunkt P_m in genauberechneter Länge um den Scheitelwinkel des $\sphericalangle E P_m D$ d. h. um das Maximum der Anomaliedifferenz in der Ekliptik weiter vorwärts in P_s. Dort liegt auch scheinbar das genaue Apogäum des Epizykels, von dem gemessen die beiden Elongationen, also $\overset{\frown}{P_s P}$ und $\overset{\frown}{P_s P_w}$ gleichgroß sind. Von dem mittleren Apogäum m des Epizykels oder dem mittleren Sonnenort $\odot$ aus gemessen erhält die östliche Elongation auf der Abendseite des Epizykels einen Zusatz, nämlich $\sphericalangle E P_m D = \overset{\frown}{P_s P_m}$, während die westliche Elongation auf der Morgenseite einen ebensogroßen Abzug erleidet. Mithin wird die östliche Elongation um das Doppelte dieses Winkels oder dieses Bogens = der Anomaliedifferenz größer als die westliche. Folglich beträgt das Maximum der Anomaliedifferenz die Hälfte der zwischen den beiden Elongationen festgestellten Differenz.

Bezeichne ich $\sphericalangle P_w E P_m$ mit a, $\sphericalangle P_ö E P_m$ mit b und $A D P_m$ mit M, so ist

$$P_m E = \frac{r_e}{\sin \frac{a+b}{2}}$$

$$D P_m E = \frac{b-a}{2}$$

$$E D = \frac{P_m E \sin D P_m E}{\sin M} \text{ oder}$$

$$E D = \frac{r_e}{\sin M} \cdot \frac{\sin \frac{b-a}{2}}{\sin \frac{b+a}{2}}.$$

Die beobachteten Werte in diese Formel eingesetzt, ergibt

$$\log E D = 8.61790, \quad E D = 0.04149 = 2^p\ 29'.4.$$

Ptolemäus nimmt $E D = 2 E O = 2^p\ 30' = 2e$.

$\frac{a+b}{2}$ ist nie größer als die größte Elongation im Perigäum A' und nie kleiner als die größte Elongation im Apogäum A; hieraus schließt Ptolemäus, daß der Mittelpunkt O des Deferenten unbeweglich ist im Gegensatz zum Deferenten des Merkur [1]).

8. Berechnung des Ortes der Venus zu gegebener Zeit.

Die Hauptaufgabe, welche für die Anwendung der Theorie in Betracht kommt, besteht darin, den wahren Ort der Venus in Länge zu bestimmen, wenn die Entfernung μ_d des mittleren Sonnenortes von der Apsidenlinie des Deferenten und die Größe der Anomalie μ_e, gezählt von dem augenblicklichen Apogäum des Epizykels, gegeben sind.

In Fig. 16 ist $A D P_m = \mu_d$,

$\Pi P_m P = \mu_e$.

Aus diesen beiden Werten läßt sich die Größe des Epizykelhalbmessers bezogen auf den Halbmesser des Deferenten als Einheit berechnen nach den Formeln:

$$P_m D = \sqrt{r_d^2 - e^2 \sin \mu_d^2} - e \cos \mu_d.$$

Ferner wenn der Winkel, um welchen der Epizykelmittelpunkt von E aus gesehen gegen die Apsidenlinie des Deferenten geneigt ist, also $A E P_m$ mit α bezeichnet wird,

[1]) Vgl. auch: Kempf, Paul, Untersuchungen über die ptolemäische Theorie der Mondbewegung. Berlin 1878; Manitius, Karl, Hipparchs Theorie des Mondes nach Ptolemaeus. „Weltall" VIII, 1, 26, 45.

$$E P_m \sin \alpha = P_m D \sin \mu_d$$
$$E P_m \cos \alpha = P_m D \cos \mu_d + 2e$$
$$D P_m E = \mu_d - \alpha$$
$$P P_m E = 180^0 - \mu_e - D P_m E$$
$$P_m E P = \text{Beobachtete Länge} - (\text{Länge des Apogäums} + \alpha)$$
$$P_m P = P_m E \frac{\sin P_m E P}{\sin (P P_m E + P_m E P)}.$$

Man kann $E P_m$ auch berechnen nach den Formeln:

$$\sin D P_m O = \frac{e}{r_d} \cdot \sin \mu_d$$
$$A O P_m = \mu_d - D P_m O$$
$$E P_m \sin \alpha = r_d \cdot \sin (\mu_d - D P_m O)$$
$$E P_m \cos \alpha = r_d \cdot \cos (\mu_d - D P_m O) + e.$$

Aus den Werten e, 2e, r_e, r_d läßt sich die Prosthaphäresis, d. i. $A E P - A D P_m$ berechnen nach den Formeln:

$$P_m D = \sqrt{r_d^2 - e^2 \sin \mu_d^2} - e \cdot \cos \mu_d$$
$$\left.\begin{aligned} E P_m \sin \alpha &= P_m D \sin \mu_d \\ E P_m \cos \alpha &= 2e + P_m D \cdot \cos \mu_d \end{aligned}\right\}$$
$$\operatorname{tg} P_m E P = \frac{r_e \sin (\mu_e + \mu_d - \alpha)}{E P_m + r_e \cos (\mu_e + \mu_d - \alpha)}.$$

Mit dem Argumente μ_d kann man die Werte für $E P_m$ und $\mu_d - \alpha$ tabulieren.

Da die Epoche für die mittlere zodiakale Bewegung der Venus mit der der mittleren Sonne identisch ist, so läßt sich zu einer gegebenen Zeit der Ort des Planeten in Länge unmittelbar aus Tafeln auffinden, wenn noch eine Epoche für die anomalistische Bewegung bekannt ist. Um diese aufzufinden und zugleich die von Hipparch überlieferte mittlere anomalistische Bewegung zu verbessern, verwendet Ptolemäus zwei Beobachtungen der Venus, eine eigene und eine weit zurückliegende.

1. Im 2. Jahre Antonins (885 Nabonassar) $^3/_4 5^h$ früh am $^{29}/_{30}$ Tybi = 138, Dezember 16 n. Chr. befand sich die Venus nach ihrer größten Elongation als Morgenstern verglichen mit Spika auf Skorpion $6^0 30'$. Der mittlere Sonnenort war zur Zeit der Beobachtung im Schützen $22^0 9'$. Auch verglichen mit dem genauen Orte des Mondes zur angegebenen Zeit ergab sich der scheinbare Ort der Venus in Skorpion $6^0 30'$, ihre nördliche Breite zu $2^0 40'$.

Da zur Zeit der Beobachtung das Apogäum des Deferenten auf Stier 25^0 und sein Perigäum auf Skorpion 25^0 fällt, so ist

$$\mu_d = 207^0 9' \qquad \beta = 216^0 30'.$$

Zur Berechnung der Anomalie μ_e bei gegebenem μ_d und β kann man sich folgender Formeln bedienen: (Fig. 16)

$$\sin DP_mO = \frac{e \sin \mu_d}{r_d}$$

$$\sphericalangle A'OP_m = \mu_d + DP_mO$$

$$DP_m = \frac{r_d \sin A'OP_m}{\sin \mu_d}$$

$$\sin DP_mE = \sin(\mu_d - \alpha) = \frac{2e \cos \mu_d \cdot \operatorname{tg} \mu_d}{DP_m - 2e \cos \mu_d}$$

$$\alpha = \mu_d + DP_mE$$

$$EP_m = \frac{DP_m \sin \mu_d}{\sin \alpha}$$

$$P_mEP = A'EP + \alpha$$

$$\sin P_mPE = \frac{EP_m \sin P_mEP}{r_e}$$

$$\Pi P_mP = P_mPE + P_mEP; \qquad \mu_e = \Pi P_mP - (\mu_d - \alpha).$$

Es ist $r_d = 1$; $r_e = 0{,}71965$; $e = 0{,}021303$; $2e = 0{,}04149$;
$A'DP_m = 27^0 9'$; $A'EP = 18^0 30'$.

$$\begin{aligned} \log\ 0{,}021303 &= 8.32844 - 10 \\ +\ \log \sin 27^0 9' &= 9.65927 - 10 \\ &\hline 7.98771 - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DP_mO &= 0^0 33' 25'' \\ A'OP_m &= 27^0 42' 25'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin 27^0 42' 25'' &= 9.66741 - 10 \\ \log \sin 27^0 9' &= 9.65927 - 10 \\ &\hline 0.00814 \end{aligned}$$

$$DP_m = 1{,}0189$$

$$\begin{aligned} \log 0{,}04149 &= 8.61790 - 10 \\ \log \cos 27^0 9' &= 9.94930 - 10 \\ \log \operatorname{tg} 27^0 9' &= 9.70997 - 10 \\ &\hline 8.27717 - 10 \\ &\hline 9.99210 - 10 \\ &\hline 8.28507 - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
DP_mE &= 1^0 6' 17'' \\
\alpha &= 28^0 15' 17'' \\
\log 1{,}0189 &= 0.00814 \\
\log \sin 27^0 9' &= 9.65927 - 10 \\
&\quad 9.66741 - 10 \\
\log \sin 28^0 15' 17'' &= 9.67521 - 10 \\
&\quad 9.99220 - 10 \\
EP_m &= 0.9822 \\
P_mEP &= 18^0 30' \\
&\quad + 28^0 15' 17'' \\
&\quad 46^0 45' 17'' \\
\log 0{,}9822 &= 9.99220 - 10 \\
- \log 0{,}71965 &= 9.85712 - 10 \\
&\quad 0.13508 \\
+ \log \sin 46^0 45' 17'' &= 9.86238 - 10 \\
&\quad 9.99746 - 10
\end{aligned}$$

$$\Pi P_mP = (83^0 48' 34'' + 46^0 45' 17'') = 130^0 33' 51''$$
$$\mu_e = [130^0 33' 51'' - 1^0 6' 17'' = 129^0 27' 34'']$$
$$\mu_e = 360^0 - 129^0 27' 34'' = 230^0 32' 26''.$$

Ptolemäus findet $230^0 32'$ (für P_mEP $46^0 45'$),
Herz „ $228^0 34',_8$ („ „ $46^0 43',_1$).

2. Von den alten Beobachtungen wählt Ptolemäus eine aus, die Timocharis aufgezeichnet hat. Im 13. Jahre des Philadelphus (regierte von 285—247 v. Chr., 476 Nabonassar) am 17/18. Mesore in der 12. Nachtstunde = 272, Oktober 12. v. Chr. 6^h früh war der Ort der Venus verglichen mit η Virg., mit dem sie in Konjunktion war, in Jungfrau $4^0 10'$. Das Perigäum des Deferenten war mit Rücksicht auf die Präzession in Skorpion $20^0 55'$. Der mittlere Ort der Sonne war in Wage $17^0 3'$, die Venus hat also ihre größte Elongation als Morgenstern schon hinter sich. Es ist

$$\mu_d = 197^0 3' \qquad \beta = 154^0 10'.$$

Zur Berechnung von μ_e kann man sich nach Fig. 17 der oben erwähnten Formeln bedienen oder auch mit Hilfe des Dreiecks DFE den Winkel DP_mE berechnen.

Es ist $A'DP_m = 33^0 52'$, $AEP = 76^0 45'$.

$$\begin{aligned}
\log 0{,}021303 &= 8.32844 - 10\\
\log \sin 33^0 52' &= 9.74605 - 10\\
&\quad 8.07449 - 10\\
DP_mO &= 0^0 40' 48''\\
A'OP_m &= 34^0 32' 48''\\
\log \sin 34^0 32' 48'' &= 9.75364 - 10\\
\log \sin 33^0 52' &= 9.74605 - 10\\
&\quad 0.00759\\
DP_m &= 1{,}0176\\
\log 0{,}04149 &= 8.61790 - 10\\
\log \cos 33^0 52' &= 9.91925 - 10\\
\log \tang 33^0 52' &= 9.82681 - 10\\
&\quad 8.36396 - 10\\
&- 9.99261 - 10\\
&\quad 8.37135\\
DP_mE &= 1^0 20' 51''\\
\alpha &= 35^0 12' 51''\\
\log 1{,}0176 &= 0.00759\\
\log \sin 33^0 52 &= 9.74605 - 10\\
&\quad 9.75364 - 10\\
\log \sin 35^0 12' 51'' &= 9.76090 - 10\\
&\quad 9.99274 - 10\\
EP_m &= 0{,}98342
\end{aligned}$$

$$P_mEP = 76^0 45' - 35^0 12' 51'' = 41^0 32' 8''$$

$$\begin{aligned}
\log 0{,}98342 &= 9.99274 - 10\\
-\log 0{,}71965 &= 9.85712 - 10\\
&\quad 0.13562\\
+\log \sin 41^0 32' 8'' &= 9.82157 - 10\\
&\quad 9.95719 - 10\\
P_mPE &= 64^0 58' 30''
\end{aligned}$$

$$\Pi P_mP = (64^0 58' 30'' + 41^0 32' 8'') = 106^0 30' 38''$$

$$\mu_e = [106^0 30' 38'' - 1^0 20' 51'' = 105^0 9' 47'']$$

$$\mu_e = 360^0 - 105^0 9' 47'' = 254^0 50' 13''.$$

Ptolemäus findet $252^0 7'$ (für P_mEP $41^0 31'$).
Herz „ $254^0 42',_8$ („ „ $41^0 34'$).

Ptolemäus teilt noch eine dritte Beobachtung mit, die vier Tage nach der zweiten stattgefunden hat, Ort der Venus in Jungfrau $8^0 50'$, mittlerer Ort der Sonne in Wage $20^0 59'$. Er verwendet diese Beobachtung nicht. Sie ergibt eine Anomalie von $254^0 18',_8$, und da die Bewegung in vier Tagen $2^0 28'$ beträgt, so ergäbe sie für die zweite Beobachtung eine Anomalie von $251^0 51'$, die nur um $16'$ von dem von Ptolemäus gefundenen Werte abweicht. Eine Korrektion der Werte gibt er nicht. Da sich aus den größten Elongationen die Epoche der Anomalie und die Verbesserung der mittleren anomalistischen Bewegung nicht mit Sicherheit finden läßt, weil die Venus sich dann in der Richtung auf die Erde zu bewegt, so mußte Ptolemäus Beobachtungen auswählen, die möglichst weit von den größten Elongationen entfernt waren, bevor aber die Sichtbarkeit des Planeten durch die Sonne beeinträchtigt wurde. Darum wäre es besser gewesen, wenn Ptolemäus die dritte Beobachtung an Stelle der zweiten benutzt hätte.

Zwischen der zweiten und ersten Beobachtung waren verflossen 409 ägyptische Jahre + 167 Tage, und diese umfassen 255 ganze Umläufe ohne wesentliche Fehler. (5 Umläufe vollziehen sich in 8 Sonnenjahren weniger $2^1/_3$ Tag $= 2919^2/_3{}^d$; 8 ägyptische Jahre sind 2920^d, also um $^1/_3{}^d$ länger, das ergibt einen Überschuß von $0^0 12' 19''$.)

408 ($= 51 \times 8$) ägyptische Jahre umfassen 255 ($= 51 \times 5$) Umläufe. Der übrig bleibende Teil des Jahres mit 167^d umfassen keinen vollen Umlauf mehr, es bleibt ein Überschuß von $338^0 25'$. Das ist der Betrag, um welchen der aus der ersten Beobachtung gefundene Ort ($230^0 32'$) dem aus der zweiten gefundenen ($252^0 7'$) voraus ist.

Diese Berechnung benutzt nun Ptolemäus, um den ihm von Hipparch überlieferten Betrag der mittleren anomalistischen Bewegung der Venus zu verbessern.

Die zweite Beobachtung benutzt Ptolemäus auch, um die Angaben für die Epoche — den Mittag des 1. Thot des ersten Jahres der Regierung Nabonassars zu machen. Zwischen diesem Zeitpunkt und dem $^{17}/_{18}$ Mesore 6^h früh 476 Nabonassar liegen 475 ägyptische Jahre $346^3/_4{}^d$. Das ergibt einen Überschuß der mittleren Bewegung von rund 181^0 ($180^0 58' 31''$). Dies von den gefundenen $252^0 7'$ abgezogen ergibt für den 1. Toth 1. Nabonassar:

1. vom Apogäum des Epizykels in Anomalie $\mu_e{}^0 = 71^0 7'$,
2. $\mu_d{}^0$ (wie bei der Sonne) $= 0^0 45$ Fische,
3. Apogäum des Deferenten $\pi_0 = 16^0 10^0$ Stier.

(Auf 476 Jahre rund fallen $4^0 45'$ Präzession.)

9. Die Bahnelemente des Merkurs.

Ptolemäus bestimmt zunächst auch hier die Lage des Apogäums. Es erscheinen ihm für diesen Zweck wenige Beobachtungen geeignet, weil, wie er sagt, die betreffende Syzygie nur selten mit der erforderlichen Schärfe der Beobachtung zugänglich ist. Unter Syzygie sind die paarweise zusammengehörigen größten Elongationen zu verstehen, in denen der Merkur, von dem mittleren Sonnenort auf entgegengesetzten Seiten des Apogäums gleichweit entfernt, einerseits als Abendstern, anderseits als Morgenstern erscheint. Derartige Beobachtungen sind nun folgende:

Im 16. Jahre Hadrians (879 Nabonassar) am Abend des 16. bis zum 17. Phamenoth = + 132, Februar 2, beobachtete er den Merkur mit Hilfe des Astrolabiums in seiner größten Elongation vom mittleren Sonnenorte. Der scheinbare Ort des Planeten, verglichen mit dem Aldebaran, war Fische 1^0, der mittlere Sonnenort Wassermann $9^0 45'$, die größte westliche Elongation des Merkur betrug also $21^0 15'$.

Im 18. Jahre Hadrians (881 Nabonassar) morgens am 18. bis zum 19. Epiphi = + 134, Juni 4, war verglichen mit dem Aldebaran der scheinbare Ort des Merkur im Stier $18^0 45'$ beobachtet, der mittlere Sonnenort war zur selben Zeit in Zwillinge 10^0, daher betrug die größte östliche Elongation $21^0 15'$.

Diese beiden Beobachtungen ergeben als Perigäum der Bahn des Merkur die Richtung nach Widder $9^0 52' 30''$.

Zwei weitere Beobachtungen ergeben nahezu dasselbe Resultat.

Im 1. Jahre Antonins (885 Nabonassar) abends am 20. bis zum 21. Epiphi = + 138, Juni 4, war der scheinbare Ort des Merkurs gemessen am Regulus in Krebs 7^0, der mittlere Sonnenort in Zwillinge $10^0 30'$, also betrug die größte westliche Elongation $26^0 30'$.

Im 4. Jahre Antonins (888 Nabonassar) frühmorgens am 18. bis zum 19. Phamenoth = + 141, Februar 2, war der scheinbare Ort des Planeten verglichen mit dem Antares in Steinbock $13^0 30^0$, der mittlere Sonnenort in Wassermann 10^0, also die größte östliche Elongation $26^0 30'$.

Diese beiden Beobachtungen ergeben als Richtung nach dem Apogäum Wage $10^0 15'$. Ptolemäus nimmt als Mittelwert für die Lage des Perigäums in seiner Zeit Widder 10^0 und des Apogäums Wage 10^0 an.

Er zieht nun sechs ältere Beobachtungen zum Vergleich heran, um so eine Bewegung des Apogäums im Laufe der Jahrhunderte zu ermitteln.

I. Im 23. Jahre nach Dionysius, am Morgen des 21. [1]) Hydron = 486 Nabonassar 17.—18. Choiak = — 261, Februar 12, scheinbarer Ort des Merkur Steinbock $22^0 20'$, der mittlere Sonnenort Wassermannn $18^0 10'$; größte östliche Elongation $25^0 50'$.

II. Im 23. Jahre nach Dionysius, am Abend des 4. Tauron = 486 Nabonassar 30. Mechir — 1. Phamenoth = — 261, April 25, scheinbarer Ort des Merkur Stier $23^0 40'$, mittlerer Sonnenort Widder $29^0 30'$; größte westliche Elongation $24^0 10'$.

III. Im 28. Jahre nach Dionysius, am Abend des 7. Didymon = 491 Nabonassar 5.—6. Pharmouthi = — 256, Mai 28, scheinbarer Ort des Merkur Zwillinge $29^0 20'$, mittlerer Sonnenort Zwillinge $2^0 50'$; größte westliche Elongation $26^0 30'$.

IV. Im 24. Jahre nach Dionysius, am Abend des 28. Leonton = 486 Nabonassar 30. Payni = — 261, August 23, scheinbarer Ort des Merkur Jungfrau $19^0 30'$, mittlerer Sonnenort Löwe $27^0 50'$, größte westliche Elongation $21^0 40'$.

V. Im 75. Jahre der Chaldäer, am Morgen des 14. Dios = 512 Nabonassar 9.—10. Thot = — 236, Oktober 29, scheinbarer Ort des Merkur Wage $14^0 10'$, mittlerer Sonnenort Skorpion $5^0 10'$, größte östliche Elongation 21^0

VI. Im 67. Jahre der Chaldäer, am Morgen des 5. Apellaios = 504 [2]) Nabonassar, 27.—28. Thot = — 244, November 19

---

[1]) Die Zahl 21 wird der 29 von Manitius und auch von Böckh, Sonnenkreise der Alten, S. 295, vorgezogen.

[2]) Delambre und Herz setzen gemäß einigen Ptolemäus-Ausgaben diese letzte Beobachtung in das Jahr 564 Nabonassar und kommen infolgedessen zu ganz unbegründeten Vorwürfen gegenüber dem Ptolemäus, dem sie an dieser Stelle und bei dieser Gelegenheit gar Fälschung zur Last legen möchten.

scheinbarer Ort des Merkur Skorpion $2^0 20'$, mittlerer Sonnenort Skorpion $24^0 50'$; größte Elongation $22^0 30'$.

Diese angegebenen sechs Beobachtungen enthalten nun keine, in denen die größten östlichen und westlichen Elongationen des Planeten vom mittleren Sonnenorte gleich sind, sie lassen deshalb die Lage des Apogäums der Merkurbahn für das Jahr 500 Nabonassar nicht klar erkennen. Ptolemäus wendet deshalb Interpolation an und setzt voraus, daß für benachbarte mittlere Orte sich die größten Elongationen nahezu proportional ändern.

In der ersten Beobachtung beträgt die größte östliche Elongation $25^0 50'$, die gleiche westliche aber liegt zwischen $24^0 10'$ und $26^0 30'$ der dritten Beobachtung.

$24^0 10'$	entsprechen	$29^0 30'$ Widder
$26^0 30'$	„	$2^0 50'$ Zwillinge
$25^0 50'$	„	$29^0 30' + 23^0 48'$.

Den letzten Wert erhöht Ptolemäus auf 24^0 und erhält für die größte westliche Elongation von $25^0 50'$ den mittleren Sonnenort Stier $23^0 30'$; die gleiche östliche Elongation war bei dem mittleren Sonnenorte Wassermann $18^0 10'$ eingetreten, die Richtung nach dem Perigäum zeigte nach Widder $5^0 50'$.

Nach der 5. und 6. Beobachtung folgt:

21^0	entsprechen	$5^0 10'$ Skorpion
$22^0 30'$	„	$24^0 50'$ „
$21^0 40'$	„	$5^0 10' + 8^0 44'$.

Diese Interpolation ist nur genähert richtig, Ptolemäus nimmt statt $8^0 44'$ den Betrag von rund 9^0 und erhält als mittleren Sonnenort Skorpion $14^0 10'$ und als Richtung nach dem Apogäum $^1/_2 (224^0 10' + 147^0 50') = 6^0$ Wage.

Um das Jahr 500 Nabonassar ist das Perigäum in 6^0 Widder, das Apogäum in 6^0 Wage, und um das Jahr 900 Nabonassar in 10^0 Widder bzw. 10^0 Wage; so hat Ptolemäus eine Bewegung des Apogäums im Sinne der Zeichen von 1^0 in hundert Jahren gefunden.

Zur Bestimmung der Größe des Epizykelhalbmessers und der Exzentrizität der Merkurbahn benutzt Ptolemäus zwei Beobachtungen, in denen der mittlere Ort des Planeten nahezu in 10^0 Widder und 10^0 Wage ist.

I. Im 19. Jahre Hadrians (882 Nabonassar) morgens am 14. bis zum 15. Athyr $= +134$, Oktober 3, war der scheinbare

Ort des Merkur mit Bezug auf Regulus in Jungfrau $20^0 12'$, der mittlere Sonnenort Wage $9^0 15'$, die größte östliche Elongation $19^0 3'$.

II. Im 19. Jahre Hadrians (882 Nabonassar) am Abend des 19. Pachon = + 135, April 5, war der scheinbare Ort des Merkur verglichen mit Aldebaran in Stier $4^0 20'$, der mittlere Sonnenort Widder $11^0 5'$, die größte Elongation $23^0 15'$.

Fig. 12 Es sei E die Erde, A das Apogäum in Wage 10^0, A′ das Perigäum in Widder 10^0, O der Mittelpunkt des Deferenten. Zieht man von E aus an die Epizykel um A und A′ die Tangenten EP_1 und EP_2, so ist

$$\sphericalangle AEP_1 = a = 19^0 3'$$
$$\sphericalangle AEP_2 = b = 23^0 15'.$$

Wird über $AE = 120^p$ als Durchmesser der Kreis beschrieben, so beträgt der zur Sehne $AP_1 = r_e$ gehörige Zentriwinkel $38^0 6'$ und nach den ptolemäischen Sehnentafeln ist $r_e = 39^p 10' 1''$, Ptolemäus nimmt für die weiteren Rechnungen $r_e = 39^p 9'$.

In gleicher Weise ist $A'P_2 = r_e = 47^p 22' 9''$, nach Ptolemäus $47^p 22'$ der Teile, von denen A′E 120 enthält. Bezogen auf $AE = 120^p$, ist $A'E = \frac{39^p\ 9'}{47^p 22^p} \cdot 120^p = 99^p 11' 1''$, Ptolemäus hat $99^0 9'$.

Mithin ist

$$AE = 120^p;\ r_e = 39^p 9';\ EA' = 99^p 9';\ AA' = 219^p 9';$$
$$AO = A'O = 109^p 34';\ e = OE = 10^p 25'.$$

Bezeichnet man $AO = A'O = r_d = 1$, so ist

$$r_e = (r_d + e) \sin a = (r_d - e) \sin b,$$
$$e = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (b - a)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (b + a)} r_d.$$
$$e = \frac{\operatorname{tg} 2^0 6'}{\operatorname{tg} 21^0 9'};\ \log e = 8.97672;\ e = 0.09478.$$
$$\log r_e = 9.55306;\ r_e = 0.35733.$$

Bezogen auf $r_d + e = 120^p$,

$$e = 10^p 23',_4;\ r_e = 39^0 10';\ A'E = 99^p 13',_3;$$
$$AA' = 219^p 13',_3;\ AO = 109^p 36',_6.$$

Die Abweichungen übersteigen nicht $4',_5$, sind somit von der Ordnung der Beobachtungsfehler.

Wenn nun der Punkt O festläge, dann dürfte die Summe der östlichen und westlichen Elongationen für denselben mittleren

Sonnenort den Wert von $46^0 30'$ nicht überschreiten und nicht unter $38^0 6'$ herabgehen. Wenn man aber die zuerst erwähnten vier Beobachtungen näher betrachtet, findet man, daß die Summe der größten Elongationen für den mittleren Sonnenort in 10^0 Zwillinge bzw. 10^0 Wassermann $47^0 45'$ beträgt. Dieses Ergebnis deutet an, daß für diesen mittleren Sonnenort (in 10^0 Zwillinge und 10^0 Wassermann) der Epizykelmittelpunkt des Merkur der Erde näher steht, als wenn der mittlere Sonnenort sich im Perigäum befindet. Um dieser Tatsache gerecht zu werden, nimmt Ptolemäus an, daß der Mittelpunkt O des Deferenten beweglich ist, sich stets auf der dem Epizykelmittelpunkte entgegengesetzten Seite der Richtung AA' befindet. Und weil nun einmal alle Ungleichheiten durch Kreisbewegungen erklärt werden sollen, so nimmt er auch für diese Bewegung des Deferentenmittelpunktes einen Kreis an, den der Deferentenmittelpunkt gleichmäßig in einem Jahre entgegen dem Sinne der Zeichen, also mit dem Uhrzeiger durchläuft.

Um nun den Punkt der Geraden AA' zu bestimmen, um den die gleichförmige Bewegung des Epizykelmittelpunktes im Sinne der Zeichen erfolgt, wählt Ptolemäus zwei Beobachtungen aus, für welche der mittlere Sonnenort in 10^0 Krebs fällt, also vom Apogäum 270^0 entfernt ist.

I. Im 14. Jahre Hadrians (877 Nabonassar) am Abend des 18. Mesore $= +\ 130$, Juli 4, beobachtete Theon den Merkur, bezogen auf Regulus, in Löwe $6^0 20'$; der mittlere Sonnenort war in Krebs $10^0 5'$, also die größte westliche Elongation $26^0 15'$.

II. Im 2. Jahre Jahre Antonins (886 Nabonassar) morgens am 24. Mesore $= +\ 139$. Juli 8, beobachtete Ptolemäus mit Hilfe des Astrolabiums den Planeten, gemessen an dem Orte des Aldebaran, in Zwillinge $20^0 5'$; der mittlere Sonnenort war in Krebs $10^0 20'$, also betrug die größte östliche Elongation $20^0 15'$.

Es sei E die Erde, A das Apogäum, A' das Perigäum der Merkurbahn, F das punctum aequans, O' der Mitelpunkt des Deferenten für den mittleren Sonnenort in Krebs 10^0. Dann ist **Fig. 13**

$$\sphericalangle\, AE\odot = \sphericalangle\, AFP_m = \sphericalangle\, O_1OO' = 270^0;$$

nach den Beobachtungen ist

$\sphericalangle\, \odot EP = 26^0 15'$, $\sphericalangle\, \odot EP' = 20^0 15'$, also

$\sphericalangle\, P_mEP' = 23^0 15'$.

$\sphericalangle\, EP_mF = \sphericalangle\, P_mE\odot = \sphericalangle\, P_mEP' - \sphericalangle\, \odot EP' = 3^0$.

$$P_mE = \frac{r_e}{\sin 23^0 15'}; \quad EF = x = P_mE \sin 3^0;$$

$$x = r_e \frac{\sin 3^0}{\sin 23^0 15'}.$$

$\log \sin 3^0$	$= 8.71880$
$- \log \sin 23^0 15'$	$= 9.59632$
	9.12248
$+ \log r_e$	$= 9.55306$
$\log x$	$= 9.67554$
x	$= 0.04737$. Es sei $OO_1 = OO' = \varrho$.

Nehmen wir $EA = r_d + \varrho + e = 1$, so wird

$x = 0.04327$ d. h. wenn wir $EA = 60^p$ annehmen,

$x = 2^p 35',_8$.

EF ist also nahezu gleich $^1/_2$ OE, darum nimmt Ptolemäus

$$OF = EF.$$

Da $\sphericalangle OFP_m = 90^0$ angenommen ist, so ist

$$OP_m = EP_m.$$

Da ferner $OF = \varrho$ relativ sehr klein ist, so nimmt Ptolemäus

$$P_mO' = P_mE + OO'.$$

Für $r_d + \varrho = 1$, ist $P_mE + \varrho = r_d$.

	$1 = r_d + \varrho$
	$2\varrho = 1 - P_mE.$
$\log r_e$	$= 9.55306$
$- \log \sin 23^0 15'$	$= 9.59632$
$\log P_mE$	$= 9.95674$
P_mE	$= 0.9052$
ϱ	$= 0.0474$
$\log \varrho$	$= 8.67578$

Es ist also auch ϱ nahezu gleich $^1/_2$ OE $=$ OF $=$ EF.

Es wird, wenn $EA = 1 = 60^p$ angenommen wird,

$$r_d = 0.9526$$

$$\log r_d = 9.97891.$$

Nimmt man nun $r_d = 1 = 60^p$. so hat man:

				Ptolemäus findet:
$r_d = 1$	$= 60^p$;	$\log r_d = 0.00000$;	$r_d = 60^p$;	
$r_e = 0.3751$	$= 22^p,5063$;	$\log r_e = 9.57415$;	$r_e = 22^p30'$;	
$e = 0.09956$	$= 5^p,9738$;	$\log e = 8.99808$;	$e = 6^p$;	
$\varrho = 0.04978$	$= 2^p,9869$;	$\log \varrho = 8.69705$;	$\varrho = 3^p$.	

Die Einführung des beweglichen Deferenten in der Theorie des Merkur dient nicht nur dazu, die Theorie so zu verfeinern, daß sie die größten Elongationen des Planeten von dem mittleren Sonnenorte 10^0 Krebs und 10^0 Steinbock genau darstellt, sondern auch dazu, für die Stellungen 120^0 vom Apogäum den Epizykel der Erde näher zu bringen, als es für den mittleren Ort 10^0 Widder der Fall ist. Wenn sich der mittlere Planet 120^0 vom Apogäum in 10^0 Wassermann und in 10^0 Zwillinge befindet, so erschien dem Ptolemäus der Epyzikel des Merkur unter einem Winkel von $47^3/_4{}^0$.

Es sei $\sphericalangle AE\odot = \sphericalangle O_1FP_m = O_1OO' = 240^0$. **Fig. 18**

Dann ist nach den Ergebnissen des Ptolemäus

$$r_d = 60^p \qquad r_e = 22^1/_2{}^p \qquad \varrho = 3^p.$$

Da $\sphericalangle OFO' = \sphericalangle P_mFE = 60^0$, so liegen die Punkte O', F, P_m in gerader Linie. Wenn man nun von E auf P_mF das Lot EG fällt, so ist

$O'P_m = 60^p$	$O'F = 3^p$	$FP_m = 57^p$
$FG = 1^p 30'$	$EG = 2^p 36'$	$GP_m = 55^p 30'$
$P_mE = 55^p 34'$	$PP_m = 22^p 30'$	$\sphericalangle PEP_1 = 47^0 46'$.

Der Unterschied zwischen Rechnung und Beobachtung beträgt 1'.

9a. Beispiel einer ptolemäischen Rechnung.

Es ist von Interesse, die Wege kennen zu lernen, die Ptolemäus zur Auflösung ebener und sphärischer Dreiecke einschlägt. Er berechnete für sich auf Grund des nach ihm genannten Satzes vom Sehnenviereck eine Sehnentafel.

Durch die sectio aurea ergaben sich die Seiten des dem Kreise einbeschriebenen Fünf- und Zehnecks, also die Sehnen zu den Winkeln von 72^0 und 36^0. Ferner fand man durch Messungen und mathematische Deutung, daß die Länge des Halbmessers sich von der Länge des 6. Teiles des Umfanges des Kreises nur ungefähr um den 21. Teil des Halbmessers unterscheidet. So konnte man näherungsweise den Halbmesser gleich dem 6. Teile des Kreisumfanges setzen, hatte also so die Sehne des Winkels von 60^0 erhalten. Es werden dann mit Hilfe des Satzes vom Sehnenviereck die Sehnen der halben Winkel, der Summen und Differenzen zweier Winkel gefunden.

In Almagest ist eine Sehnen (Chorden) -Tafel[1]) gegeben, bei der

[1]) Vgl. F. Hultsch, Die Sehnentafeln der griechischen Astronomen. Weltall II, S. 49 ff. — Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I² S. 388 ff. — Zeuthen, Geschichte der Mathematik S. 230 ff. — Ideler, Über die Trigonometrie der Alten in Zachs Monatl. Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelkunde. Bd. XXVI. S. 3 ff. — Hultsch weist nach, daß Almag. I. c. 10 lediglich eine zusammenfassende Darstellung der Hauptergebnisse aus zwei umfänglichen Werken des Hipparch und Menelaos darstellt.

das Argument von halbem zu halbem Grade forschreitet, während die Sehnen in Teilen (partes = μοῖραι) ausgedrückt sind, von denen 60 auf den Halbmesser, 120 auf den Durchmesser gehen. Die Bruchteile werden nach dem Sexagesimalsystem gebildet. Der 60. Teil eines Grades heißt minuta prima, der 60. Teil dieser Einheit heißt minuta secunda usw. Man schreibt diese von links nach rechts derart, daß die Zahlen der minuta prima mit einem Strich, die der minuta secunda mit zwei Strichen usw. versehen wurden. So ist nach dieser Sehnentafel (Almag. lib. I. c. 11) für den Winkel $43^0\,0'$ die Sehne

$$43^p\ 58'\ 49'' = \frac{43}{60} + \frac{58}{60^2} + \frac{49}{60^3}.$$

In Teilen des Halbmessers ist daher die halbe Sehne (oder der Sinus von $21^0\,30'$) gleich

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{43}{60} + \frac{58}{60^2} + \frac{49}{60^3}\right) = 0.3665.$$

Die alten Griechen pflegten alle Dreiecksaufgaben (alle trigonometrischen Aufgaben) auf Auflösungen rechtwinkliger Dreiecke zurückzuführen. Die Hypotenuse betrachteten sie als Durchmesser eines Kreises, so daß die drei Seiten Sehnen darstellten, die Bögen aber, zu denen diese gehören, sind doppelt so groß, als die ursprünglichen Dreieckswinkel. Dies berücksichtigten sie dadurch, daß sie in ihren Rechnungen einen Unterschied machten zwischen solchen Graden, von denen 360 vier Rechte, und solchen, von denen 360 nur zwei Rechte ausmachen.

Das Beispiel einer ptolemäischen Rechnung ist entnommen dem Almagest, lib. IX. c. 8. 9.

Ptolemäus benutzt zur Ermittlung der Größe der Exzentrizität und des Epizykelhalbmessers des Merkur, wie oben gezeigt, zwei Beobachtungen des Planeten.

I. + 134, Oktober 3, größte Elongation des Merkur $19^0\,3'$;
II. + 135, April 5, „ „ „ „ $23^0\,15'$.

Das Apogäum war in Wage 10^0.

Es ist (Fig. 1*)

$\sphericalangle$ ABD = $19^0\,3'$, von denen 360 = 4 R sind,
= $38^0\,6'$, „ „ 360 = 2 R „

$\overset{\frown}{AD}$ = $38^0\,6'$, von denen 360^0, die der dem Dreieck ABD umschriebene Kreis enthält.

AD = $39^p\,9'$ von den Teilen, von welchen die Hypotenuse BA 120 enthält.

Es ist $\sphericalangle$ GBE = $23^0\,15'$, von denen 360^0 = 4 R sind,
= $46^0\,30'$, „ „ 360^0 = 2 R sind.

$\overset{\frown}{GE}$ = $46^0\,30'$ von den 360^0, die der dem Dreieck GBE umschriebene Kreis enthält.

GE = $47^p\,22'$ von den Teilen, von welchen die Hypotenuse BG 120 enthält.

Nun ist GE = AD = $39^p\,9'$ von den Teilen, von welchen die Hypotenuse BA 120 enthält, also

BG = 99^{p} 9′ von denselben Teilen, mithin
AG = 120^{p} + 99^{p} 9′ = 219^{p} 9′.
Ferner ist ZG = ZA = 109^{p} 34′, also
BZ = 10^{p} 25′.

Um die Lage des punctum aequans zu ermitteln, führt Ptolemäus zwei weitere Beobachtungen an:

I. + 130, Juli 4, größte Elongation des Merkur 26^{0} 15′,
II. + 139, Juli 8, „ „ „ „ 20^{0} 15′.

Das Apogäum in Wage 10^{0}, der mittlere Sonnenort in Krebs 10^{0}.

Es ist nun (Fig. 2*)

$\sphericalangle$ KBL = 46^{p} 30′, von denen 360^{0} = 4 R sind,
$\sphericalangle$ KBT = 46^{0} 30′, „ „ 360^{0} = 2 R sind.

$\overset{\frown}{KT}$ = 46^{0} 30′, von den 360^{0}, die der dem Dreieck BTK umbeschriebene Kreis enthält.
KT = 47^{p} 22′, von den Teilen, von welchen die Hypotenuse BT 120 enthält.
KT = 39^{p} 9′, von den Teilen, von welchen BZ 10^{p} 25′ und BT 99^{p} 9′ enthält.

Der Unterschied zwischen den beiden Elongationen 6^{0} enthält zweimal die Ungleichheit, also zweimal den Winkel BTH. Es ist

$\sphericalangle$ BTH = 3^{0}, von denen 360^{0} = 4 R sind,
= 6^{0}, „ „ 360^{0} = 2 R sind.

$\overset{\frown}{BH}$ = 6^{0}, von den Graden, von welchen der dem Dreieck BTH umbeschriebene Kreis 360 hat.
BH = 6^{p} 17′ von den Teilen, von welchen die Hypotenuse BT 120 enthält.
BT = 99^{p} 9′ und BZ = 10^{p} 25′ waren ermittelt, also
BH = 5^{p} 12′, also
BH = HZ = *ἔγγιστα* 5^{p} 12′ von den Teilen, von welchen der Epizykelhalbmesser 39^{p} 9′ enthält.

Es sei (Fig. 3*) ZMN $\perp$ AG.

HT und ZN vollführen in gleicher Zeit, aber in entgegengesetztem Drehungssinne einen Kreis.

ZN = ZA. M = Mittelpunkt des Deferenten, $\sphericalangle$ MZH = 90^{0}, $\sphericalangle$ TZH nicht viel verschieden von 90^{0}, also TZN nicht viel von einer Geraden verschieden.

ZN = ZA = 109^{p} 34′ } von den Teilen, von welchen der Epizykelhalb-
ZT = BT = 99^{p} 9′ } messer 39^{p} 9′ enthält.
NZT = 208^{p} 43′ } von denselben Teilen, also
NM = 104^{p} 22′ }
ZM = 5^{p} 12′.

BH = HZ = 5^{p} 12′ bereits ermittelt. Macht man nun
NM = 60^{p}, so ist

ZM ($= \varrho$) = BH = HZ = 3^p und der Epizykelhalbmesser
$r_e = 22^p\,30'$ von den Teilen, von welchen NM 60 enthält.

Man sieht, daß Ptolemäus auf diese Weise zu Ergebnissen gelangt, die von den früher angegebenen nur gering abweichen.

Um den Beweis zu führen, daß bei den für die Elemente der Bahn festgestellten Werten die Summe zweier größter Elongationen des Planeten $47^0\,45'$ beträgt, macht er (in Fig. 4*)

$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle\ ABH = 120^0 = \sphericalangle\ AGL \\ \sphericalangle\ GBH = 60^0 = \sphericalangle\ DGL \end{array}\right\}$ von denen $360^0 = 4$ R sind.

Es ist also $\triangle$ BGH ein gleichschenkliges und gleichseitiges.

Es ist HGZ eine gerade Linie, ferner DL $\perp$ GZ.

Es ist HZ = 60^p, von denen GH = GD = 3^p ist, also
GZ = 57^p.

Da $\sphericalangle$ DGL = 60^0 ist, von denen $360^0 = 4$ R sind,
$= 120^0$ „ „ „ „ $360^0 = 2$ R „ , so ist

$\left.\begin{array}{ll} \overset{\frown}{DL} & = 120^p \\ \overset{\frown}{GL} & = 60^p \end{array}\right\}$ von den Teilen, von welchen der Umkreis des Dreiecks DGL 360 enthält.

$\overset{\frown}{DL} = 103^p\,55'$ von den Teilen, von welchen die Hypotenuse DG 120 enthält.

$\left.\begin{array}{ll} GL & = 60^p. \text{ Es war aber} \\ DG & = 3^p, \text{ darum} \\ GZ & = 57^p \\ DL & = 2^p\,36' \\ GL & = 1^p\,30' \end{array}\right\}$ von den Teilen, von welchen der Epizykelhalbmesser $22^p\,30'$ enthält.

Es ist LZ = $55^p\,30'$; es ist $LZ^2 + DL^2 = DZ^2$,
DZ = $55^p\,34'$ von den Teilen, von welchen der Epizykelhalbmesser $22^p\,30'$ enthält.

Nehmen wir nun DZ = 120^p, den Epizykelhalbmesser entsprechend zu $48^p\,35'$, dann ist

ZDK = ZDT = $47^0\,46'$, von welchen $360^0 = 2$ R sind, also
KDT = $47^0\,46'$, „ „ $360^0 = 4$ R sind.

10. Berechnung des Ortes des Merkur zu gegebener Zeit.

Um den wahren Ort des Merkur in Länge zu bestimmen, wenn μ_d und μ_e gegeben sind, betrachte man Fig. 19. Es ist

$$AE\odot = AFP_m = AOO' = \mu_d$$
$$BP_mP = \mu_e$$
$$AFO' = \frac{\mu_d}{2},\ O'FP_m = \frac{3\,\mu_d}{2},\ \text{mithin}$$

$$O'F = 2\,\varrho\,\cos\frac{\mu_d}{2}$$

$$\sin O'P_mF = \frac{2\,\varrho}{r_d}\cdot\cos\frac{\mu_d}{2}\sin\frac{3\,\mu_d}{2}$$

$$P_mF = r_d\,\frac{\sin\left(\frac{3\,\mu_d}{2} + \sphericalangle\, O'P_mF\right)}{\sin\frac{3\,\mu_d}{2}}.$$

Es sei $AEP_m = \alpha$, dann bestehen die Gleichungen:

$$EP_m\cos\alpha = FP_m\cos\mu_d + \varrho$$
$$EP_m\sin\alpha = FP_m\sin\mu_d.$$

Hiermit läßt sich EP_m und α berechnen.

Es sei $P_mEP = \beta$, dann bestehen die Gleichungen:

$$PE\cdot\cos\beta = P_mE\cos\alpha + r_e\cos(\mu_d + \mu_e)$$
$$PE\cdot\sin\beta = P_mE\sin\alpha + r_e\sin(\mu_d + \mu_e).$$

$$P_mPE = \mu_d + \mu_e - \beta.$$

Ist dieser Winkel gleich 90^0, so haben wir die größte westliche Elongation des Merkur, ist er gleich 270^0, die größte östliche.

Die Epoche für die mittlere zodiakale Bewegung des Merkur ist identisch mit der der mittleren Sonne; es läßt sich also die verlangte Rechnung ausführen, wenn die Epoche für die anomalistische Bewegung bekannt ist. Um diese zu finden und zugleich den ihm von Hipparch überlieferten Betrag der mittleren anomalistischen Bewegung zu verbessern, gibt Ptolemäus zwei Beobachtungen an, eine selbst angestellte, eine aus alter Zeit überlieferte.

1. Im 2. Jahre Antonins (886 Nabonassar) am $^2/_3$ Epiphi $4^1/_2$ Äquinoktialstunden vor Mitternacht = 139 Mai 17 n. Chr. $7^h\ 30^m$ abends war Merkur von seiner größten westlichen Elongation, verglichen mit Regulus und dem Mondmittelpunkte, in Zwillinge $17^0\,30'$. Der mittlere Sonnenort war zur Zeit der Beobachtung in Stier $22^0\,34'$.

Das Apogäum des Deferenten ist in Wage 10^0; es ist also

$$\mu_d = 222^0\,34' \qquad \beta = 247^0\,30'.$$

Um μ_e bei gegebenem μ_d und β zu berechnen, kann man die oben angegebenen Gleichungen verwenden. Es ist dann weiter

$r_e \cdot \sin(\mu_d + \mu_e - \beta) = P_mE \sin(\beta - \alpha)$
$r_e \sin(\mu_d + \mu_e - \beta) = P_mF \sin(\beta - \mu_d) + \varrho \sin \beta.$

Man erhält zwei Werte für $\mu_d + \mu_e - \beta$, von denen der eine für die Stellung des Merkur vor der größten Elongation, der andere für dieselbe nach der größten Elongation gilt.

Es ist $r_d = 1$, $r_e = 0{,}3751$, $\varrho = 0{,}04978$.

Es ist

$$\frac{\mu_d}{2} = 180^0 - 68^0 43'$$

$$\frac{3\mu_d}{2} = 360^0 - 26^0\ 9'$$

$$\log\left(-\cos\frac{\mu_d}{2}\right) = 9.55988 - 10$$

$$\log\left(-\sin\frac{3\mu_d}{2}\right) = 9.64417 - 10$$

$$\log\frac{2\varrho}{r_d} = 8.99808 - 10$$

$$8.20213 - 10$$

$$O'P_mF = 0^0 54' 45''$$

$$\frac{3\mu_d}{2} + O'P_mF = 360^0 - 25^0 14' 15''$$

$$\log\left(-\sin\left[\frac{3\mu_d}{2} + \sphericalangle O'P_mF\right]\right) = 9.62979 - 10$$

$$\log 1 = 0.00000$$

$$\log\left(-P_mF \sin\frac{3\mu_d}{2}\right) = 9.62979 - 10$$

$$\log\left(-\sin\frac{3\mu_d}{2}\right) = 9.64417 - 10$$

$$\log P_mF = 9.98562 - 10$$

$$\log \sin 24^0 56' = 9.62486 - 10$$

$$9.61048 - 10$$

$$P_mF \sin 24^0 56' = 0{,}40783$$

$$\log 0{,}04978 = 8.69705 - 10$$

$$\log(-\sin\beta) = 9.96562 - 10$$

$$8.66267 - 10$$

$$-\varrho \cdot \sin\beta = 0{,}04599.$$

$$P_mF \sin(\beta - \mu_d) = 0{,}40783$$

$$+\varrho \sin\beta = 0{,}04599$$

$$0{,}36184$$

$$\log 0{,}36145 = 9.55852 - 10$$
$$\log 0{,}3751 = 9.57415 - 10$$
$$\log \sin (\mu_d + \mu_e - \beta) = 9.98437$$
$$\mu_d + \mu_e - \beta = 74^0\,43'\,14''$$
$$\beta - \mu_d = 24^0\,56'$$
$$\mu_e = 99^0\,39'\,14''$$

Ptolemäus findet $\mu_e = 99^0\,27'$,
Herz „ $\mu_e = 99^0\,53'$ (Seite 139, wahrscheinlich ein Versehen),
Boelk „ $\mu_e = 99^0\,33'\,38''{,}_3$ (Seite 27).

2. Im 21. Jahre der Zeitrechnung nach Dionysius (484 Nabonassar) am 18/19. Thoth morgens = 264 November 15 v. Chr. war Merkur vor seiner größten östlichen Elongation, verglichen an β und δ Skorpionis, in Skorpion $3^0\,20'$, der mittlere Sonnenort in Skorpion $20^0\,50'$.

Es ist $\mu_d = 44^0\,50'$ $\beta = 27^0\,20'$

$\frac{\mu_d}{2} = 22^0\,25'$ $\frac{3\,\mu_d}{2} = 67^0\,15'$

$$\log \cos \frac{\mu_d}{2} = 9.96587 - 10$$
$$\log \sin \frac{3\,\mu_d}{2} = 9.96483 - 10$$
$$\log \frac{2\varrho}{r_d} = 8.99808 - 10$$
$$\log \sin O'P_mF = 8.92878 - 10$$
$$O'P_mF = 4^0\,52'\,8''$$
$$\frac{3\,\mu_d}{2} + O'P_mF = 72^0\,7'\,8''$$
$$\log \sin 72^0\,7'\,8'' = 9.97849 - 10$$
$$\log r_d = 0.00000$$
$$9.97849 - 10$$
$$\log \sin \frac{3\,\mu_d}{2} = 9.96483 - 10$$
$$\log P_mF = 0.01366$$
$$P_mF = 1{,}0319$$
$$\log 1{,}3606 = 0.01366$$
$$\log (-\sin (\beta - \mu_d)) = 9.47814 - 10 = \log (-\sin 17^0\,30')$$
$$\log (-P_mF \sin (\beta - \mu_d)) = 9.49180 - 10$$
$$-P_mF \sin (\beta - \mu_d) = 0{,}31032$$

$$\log \varrho = 8.69705 - 10$$
$$\log \sin \beta = 9.66197 - 10$$
$$\log \varrho \sin \beta = 8.35902 - 10$$
$$\varrho \cdot \sin \beta = 0,022857$$
$$r_d \cdot \sin (\mu_d + \mu_e - \beta) = 0,28746$$
$$\log (- r_d \sin (\mu_d + \mu_e - \beta)) = 9.45858 - 10$$
$$\log r_e = 9.57415 - 10$$
$$\log (- \sin (\mu_d + \mu_e - \beta)) = 9.88443 - 10$$
$$\mu_d + \mu_e - \beta - 180^0 = 50^0 1' 40''$$
$$\mu_d + \mu_e - \beta = 230^0 1' 40''$$
$$\mu_d - \beta = 17^0 30'$$
$$\mu_e = 212^0 31' 40''.$$

Ptolemäus findet $\mu_e = 212^0 34'$
Herz „ $\mu_e = 212^0 31',_2$ (Seite 139)
Boelk „ $\mu_e = 212^0 31' 56'',_7$ (Seite 29).

Die zwischen den beiden Beobachtungen (19. Thoth 6^h früh 484 Nabonassar bis 2. Epiphi $7^h\ 30^m$ abends 886 Nabonassar) verflossene Zeit umfaßt nahezu 402 ägyptische Jahre, 283 Tage und $13^1/_2$ Äquinoktialstunden. In 46 Sonnenjahren und einem Tage d. i. $16802^1/_2$ Tagen vollendet Merkur 145 Wiederkehren der Anomalie. Die auf 20 ägyptische Jahre oder 7300 Tage entfallenden Umläufe findet man nach der Proportion $16802^1/_2$:

$7300 = 145 : x$

$x = 62 \cdot \frac{16745}{16803}$; es fehlen also an 63 Umläufen auf dem Epizykel $\frac{58}{16803} = \frac{1}{290}$ Umlauf $= 1^1/_4{}^0$.

Der Merkur führt also, da er in 20 ägyptischen Jahren nahezu 63 Umläufe ausführt, in 400 Jahren 1260 Wiederkehren der Anomalie aus. Die übrigen 2 Jahre und die überschießenden Tage ergeben 8 Umläufe. Der Merkur hat also in der ganzen Zwischenzeit 1268 Umläufe vollendet und noch $246^0 53'$ zurückgelegt ($246^0 53' 36''$).

Auf Grund dieser Ergebnisse verbessert Ptolemäus den ihm von Hipparch überlieferten Betrag der mittleren anomalistischen Bewegung des Merkur.

Die Beobachtung am 19. Thot 6^h früh 484 Nabonassar benutzt er nun noch, um die Größe der Anomalie zur Zeit der

Epoche am Mittag des 1. Thoth 1 Nabonassar zu bestimmen. Die Zwischenzeit beträgt 483 ägyptische Jahre, 17 Tage, 18 Stunden. Der Überschuß der mittleren anomalistischen Bewegung über die vollen Umläufe ist $190^0\,39'$ ($190^0\,39'\,4''$). Dieser Betrag, abgezogen von $212^0\,34'$, ergibt für den Mittag des 1. Thot 1. Nabonassar die Anomalie

$$\mu_e{}^0 = 21^0\,55'$$
$$\mu_d{}^0 = \text{Fische } 0^0\,45'$$
$$\pi_0 = \text{Wage } 1^0\,10'$$

(unter Berücksichtigung von $4^0\,50'$ Präzession in den verflossenen 483 Jahren).

11. Tafeln für die Bewegung von Venus und Merkur in Länge.

Es seien $\omega_d t$ und $\omega_e t$ die nach Abtrennung der vollen Umläufe aus den Tafeln für die mittlere zodiakale und anomalistische Bewegung für einen Zeitraum von 18 ägyptischen Jahren, einem Monat, einem Tag und einer Stunde gefundenen Werte, πt sei die Drehung des Apogäums im Deferenten bzw. die wegen Präzession korrigierte Länge des Apogäums. Nun läßt sich μ_d und μ_e für jede Beobachtungszeit angeben; es ist

$$\mu_d = \mu_d{}^0 + \omega_d t - \pi_0 - \pi t.$$
$$\mu_e = \mu_e{}^0 + \omega_e t.$$

Um nun aus dem mittleren Orte des Planeten den wahren zu finden, gibt Ptolemäus für die einzelnen Planeten je eine Tafel von 8 Spalten. Die beiden ersten Spalten enthalten das Argument, die dritte Spalte gibt die Prosthaphäresis, berechnet unter der Voraussetzung, daß sich der Epizykelmittelpunkt auf einem Kreise bewege, der mit der mittleren Entfernung als Halbmesser um den Punkt der gleichmäßigen Winkelbewegung beschrieben ist; die vierte Spalte gibt ein Korrektionsglied für Spalte drei, weil der Mittelpunkt des Epizykels sich in Wirklichkeit nicht auf dem vorbenannten Kreise bewegt.

In Fig. 20 sei $y = \beta - \alpha$ die von der Erde aus betrachtete Elongation des Planeten von dem Epizykelmittelpunkte P_m in einer beliebigen Entfernung vom Apogäum des Deferenten.

Ferner sei y' die zugehörige größte Elongation, E' das von der Erde gesehene scheinbare Apogäum des Epizykels, dann ist $\sphericalangle EP_mP = \mu_d + \mu_e - \alpha$, mithin ist

$$PE \cdot \cos y = r_e \cdot \cos (\mu_d + \mu_e - \alpha) + P_mE$$
$$PE \cdot \sin y = r_e \sin (\mu_d + \mu_e - \alpha)$$
$$P_mE \sin y' = r_e$$

Betrachtet man $\mu_d + \mu_e - \alpha$ als konstant, so ist y eine Funktion von P_mE; y ist um so kleiner, je größer P_mE ist. In Fig. 21 sei für Merkur y_1 der kleinste Wert für $P_{m_1}E$, y_2 der mittlere Wert für $P_{m_2}E = r_d = 1 = 60^p$, y_3 der größte Wert für $P_{m_3}E$, was nahezu für einen Abstand von 120^0 vom Apogäum des Deferenten zutrifft. y'_1, y'_2, y'_3 sind die Werte für die entsprechenden größten Elongationen. Nun ist

$$\text{tg } y_1 = \frac{r_e \sin (\mu_d + \mu_e - \alpha)}{r_e \cos (\mu_d + \mu_e - \alpha) + P_{m_1}E}; \quad P_{m_1}E \sin y'_1 = r_e;$$

$$\text{tg } y_2 = \frac{r_e \cdot \sin (\mu_d + \mu_e - \alpha)}{r_e \cos (\mu_d + \mu_e - \alpha) + r_d}; \quad r_d \cdot \sin y'_2 = r_e;$$

$$\text{tg } y_3 = \frac{r_e \sin (\mu_d + \mu_e - \alpha)}{r_e \cos (\mu_d + \mu_e - \alpha) + P_{m_3}E}; \quad P_{m_3}E \sin y'_3 = r_e.$$

Ist $y' \leqq y'_2$, so besteht die Proportion

$$\frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} = \frac{y'_2 - y'}{y'_2 - y'_1}; \text{ setzt man}$$

$$\lambda = -\frac{y'_2 - y'}{y'_2 - y'_1}, \text{ so ist}$$

$$y = y_2 + \lambda (y_2 - y_1).$$

Ist $y' \geqq y'_2$, so ist

$$\frac{y - y_2}{y_3 - y_2} = \frac{y' - y'_2}{y'_3 - y'_2},$$

$$\lambda = \frac{y' - y'_2}{y'_3 - y'_2}, \text{ mithin}$$

$$y = y_2 + \lambda (y_3 - y_2).$$

Die fünfte Spalte enthält $y_2 - y_1$, die sechste y_2, die siebente $y_3 - y_2$ und die achte λ (die Sechzigstel). (Vgl. Tafel I, II.)

Merkur ist nun (vgl. Fig. 14)[1]) der einzige Planet, bei welchem für das Perigäum die Sechzigstel nicht 60, sondern 40 betragen; dies ist in den Merkurstafeln der einzige Umstand, der die Berücksichtigung der Kreisbewegung des Deferentenmittelpunkts verrät, sonst ist die Merkurstafel genau so angelegt, wie die der übrigen Planeten.

[1]) Diese Figur gibt Reinhold in den „Theoricae novae planetarum Purbachii, ab Erasmo Reinholdo Salveldensi pluribus figuris auctae etc." 1542. Vgl. auch S. 27.

Ist λ negativ, so ist $y = y_2 + \lambda (y_2 - y_1)$ zu nehmen;
ist λ positiv, so ist $y = y_2 + \lambda (y_3 - y_2)$ zu nehmen.

Zur sechsten Spalte ist noch zu bemerken, daß der Wert der Prosthaphäresis negativ ist, wenn $\mu_d + \mu_e - \alpha \geq 180^0$ ist.

Die wahre Länge des Planeten, bezogen auf das Apogäum des Deferenten, ist

$$\beta = \mu_d - (\mu - \alpha) + y.$$

Es soll der Ort der Venus am 16. Dezember 138 n. Chr. $^3/_4 5^h$ früh berechnet werden. Die seit der Epoche verflossene Zeit beträgt $885^a\ 28^d\ 16^3/_4{}^h$. Nach den Tafeln der mittleren Bewegung ergibt sich der mittlere Ort der Sonne zu Schütze $22^0\ 9'$, die mittlere Anomalie zu $230^0\ 31'$. Es ist also, da das Apogäum des Deferenten Stier 25^0 war,

$$\mu_d = 207^0 \qquad \mu_e = 230^0\ 31'.$$

Für das Argument $207^0\ 9'$, ist nach Spalte 3 und 4

$$\mu_e - \alpha = 1^0\ 7' - 0^0\ 2' = 1^0\ 5'$$
$$\mu_d + \mu_e - \alpha = 207^0\ 9' + 1^0\ 5' = 208^0\ 14' \text{ (Länge)}$$
$$\mu_e - (\mu_e - \alpha) = 230^0\ 31 - 1^0\ 5' = 229^0\ 26' \text{ (Anomalie).}$$

Mit dem letzten Wert als Argument ergibt Spalte 6: $-\ 45^0\ 43'$. Zu $207^0\ 9'$ als Argument gibt Spalte 8: $\lambda = \frac{52}{60}$. Dies multipliziert mit $1^0\ 10'$ aus Spalte 7 gibt $+ \lambda (y_3 - y_2) = 1^0\ 1'$. Dies addiert zu $y_2 = -\ 45^0\ 43'$ ergibt $46^0\ 44'$. Dies subtrahieren wir von der gefundenen Länge $208^0\ 14'$ und erhalten $161^0\ 30'$. Die Rechnung war also

$$\begin{aligned} \mu_d &= 207^0\ 9' \\ + \mu_e - \alpha &= 1^0\ 5' \\ - y &= -46^0\ 44' \\ \hline \beta &= 161^0\ 30'. \end{aligned}$$

Der Ort der Venus war also Skorpion $6^0\ 30'$.

Für Merkur soll sein Ort in Länge am 15. November 264 v. Chr. 7^h früh berechnet werden. Die seit der Epoche verflossene Zeit beträgt $483^a\ 17^d\ 19^h$. Nach den Tafeln der mittleren Bewegung ergibt sich der mittlere Sonnenort in Skorpion $20^0\ 51'$, die mittlere Anomalie zu $212^0\ 41'$. Es ist also, da das Apogäum des Deferenten in Wage 6^0 sich befindet,

$$\mu_d = 44^0\ 51' \qquad \mu_e = 212^0\ 41'.$$

Für das Argument $44^0\ 51'$ ergibt Spalte 3 und 4:

$\mu_e - \alpha = 1^0 53'$

$\mu_d - (\mu_e - \alpha) = 44^0 51' - 1^0 53' = 42^0 58'$ (Länge)

$\mu_e + (\mu_e - \alpha) = 212^0 41' + 1^0 53' = 214^0 34'$ (Anomalie).

Mit dem letzten Wert als Argument ergibt Spalte 6

$y_2 = -17^0 3'$, und Spalte 5 ergibt $y_2 - y_1 = 2^0 54'$.

Das Argument $44^0 51'$ ergibt aus Spalte 8: $\lambda = \frac{29}{60}$. Dies multipliziert mit $2^0 54'$ ergibt $\lambda \cdot (y_2 - y_1) = 1^0 25'$. Dies subtrahiert von y_2 ergibt $15^0 38'$. Dieser Wert wird von $42^0 58'$ subtrahiert, und man erhält $\beta = 27^0 20'$. Die Rechnung war also:

$$\begin{aligned} \mu_d &= 44^0 51' \\ -(\mu_e - \alpha) &= 1^0 53' \\ y &= -15^0 38' \\ \hline \beta &= 27^0 20'. \end{aligned}$$

Der Ort des Merkur war also Skorpion $3^0 20'$.

Man sieht also, daß Ptolemäus in einfacher und sinnreicher Weise mit Hilfe der Tafeln die Aufgabe löst, zu einer gegebenen Zeit den Ort der Planeten in Länge zu berechnen.

12. Die Stillstände des Merkur und der Venus[1]).

Im 1. Kapitel des 12. Buches des Almagest beginnt Ptolemäus mit der Betrachtung der Rückläufigkeitsstrecken der Planeten und zeigt, daß auch die zahlenmäßigen Beträge dieser Bewegungen sich aus seinen Hypothesen in ausreichender Übereinstimmung mit den Beobachtungsergebnissen ableiten lassen. In Fig. 22 seien S und S' die Stillstandspunkte des Planeten, wenn sich der Epizykelmittelpunkt P_m in der mittleren Entfernung r_d von der Erde befindet, und T und T' die Punkte, welche die gleiche Länge haben. Nach dem Lehrsatz des Apollonius von Perga bestehen folgende Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{TS}{ES} = \frac{\omega_d}{\omega_e} \qquad \tfrac{1}{2}\,\frac{T'S'}{ES'} = \frac{\omega_d}{\omega_e}.$$

ω_d bezeichnet die zodiakele, ω_e die anomalistische Geschwindigkeit.

$$\frac{\tfrac{1}{2}\,TS}{\tfrac{1}{2}\,TS + ES} = \frac{\omega_d}{\omega_d + \omega_e}$$

$$\frac{ES}{\tfrac{1}{2}\,TS + ES} = \frac{\omega_e}{\omega_d + \omega_e}.$$

[1]) Vgl. Seite 21—24.

Bezeichnet man $\sphericalangle P_m ES$ mit μ, so ist

$$^1/_2 \text{ TS} + \text{ES} = r_d \cdot \cos \mu, \text{ mithin}$$

$$^1/_2 \text{ TS} = \frac{\omega_d}{\omega_d + \omega_e} \cdot r_d \cos \mu$$

$$\text{ES} = \frac{\omega_e}{\omega_d + \omega_e} r_d \cdot \cos \mu.$$

Da aber ES (ES + ET) $= r_d^2 - r_e^2$ ist, so erhält man

$$\cos^2 \mu = \frac{(r_d^2 - r_e^2)\ (\omega_d + \omega^e)^2}{r_d^2\ \omega_e\ (2\ \omega_d + \omega_e)}.$$

Es treten also Stationen nur ein, wenn $\cos^2 \mu < 1$ oder wenn $\frac{\omega_d}{\omega_e} < \frac{r_e}{r_d - r_e}$ ist. Es sei v der Bogenabstand des Punktes S vom Perigäum des Epizykels, $v = B' P_m S$, dann ist

$$\sin (\mu + v) = \frac{r_d}{r_e} \sin \mu.$$

Die Zeit t für die Dauer einer halben Retrogradation beträgt $t = \frac{S P_m B'}{\omega_e} = \frac{v}{\omega_e}$, und die Größe des halben retrograden Bogens $B = \mu - t\omega_d$, wenn man bedenkt, daß P_m in der Zeit t sich um den Bogen $t\omega_d$ bewegt hat.

Für Merkur ist $r_d = 60^p$, $r_e = 22^1/_2{}^p$

„ Venus „ $r_d = 60^p$, $r_e = 43^1/_6{}^p$.

Bei der mittleren Entfernung findet Ptolemäus für Merkur als Zeit der Retrogradation $2t = 22^1{}_2$ Tage, die Größe des retrograden Bogens $2B = 12^0 17' 10''$ und $2v = 34^0 27' 10''$.

Ist $r_{d_1} = 68^p 36'$, also bei der größten Entfernung findet er $2t_1 = 21$ Tage, $2B_1 = 7^0 54' 22''$ und $2v_1 = 65^0 44' 52''$.

Ist $r_{d_2} = 55^p 34'$, also bei der geringsten Entfernung findet er $2t_1 = 23$ Tage, $2B_2 = 15^0 12' 46''$ und $2v = 71^0 0' 30''$.

Bei der mittleren Entfernung findet Ptolemäus für Venus als Zeit der Retrogradation $2t = 41^2{}_3$ Tage, die Größe des retrograden Bogens $B = 15^0 17' 34''$ und $2v = 25^0 44' 48''$.

Ist $r_d = 61^p 10'$, also bei der größten Entfernung findet er $2t = 43$ Tage, $2B = 16^0 25' 26''$, $2v = 28^0 7' 34''$.

Ist $r_d = 58^p 50'$, also bei der geringsten Entfernung findet er $2t = 40^2/_3$ Tage, $2B = 14^0 4' 38''$ und $2v = 23^0 28' 48''$.

Um für eine beliebige Lage des Epizykelmittelpunktes die Stillstandspunkte angeben zu können, stellt Ptolemäus eine Tafel auf, die für die mittlere Länge als Argument die Anomalie der

Stationen angibt. (Vgl. Tafel III.) Für ein gegebenes Argument sei die zugehörige Entfernung des Epizykelmittelpunktes von der Erde r_d' und es bestehe die Gleichung

$$r_d \leqq r_d' \leqq r_{d_1},$$

dann gilt für das entsprechende v' die Proportion:

$$\frac{v' - v}{v_1 - v} = \frac{r_d' - r_d}{r_{d_1} - r_d}.$$

Ist aber $r_{d_2} \leqq r_d' \leqq r_d$, so verhält sich

$$\frac{v' - v}{v_2 - v} = \frac{r_d' - r_d}{r_{d_2} - r}.$$

Ptolemäus gibt im 7. Kapitel des 12. Buches für alle Planeten bei einer mittleren Länge von 30^0 die Stillstandspunkte als Beispiel an. Er findet durch Rechnung und nach der Tafel III für Merkur: Länge 30^0, $r_d' = 66^p 35'$, Stillstandspunkte $146^0 39'$ und $213^0 21'$; für Venus: Länge 30^0, $r_d' = 61^p 6'$, Stillstandspunkte $166^0 0'$ und $194^0 0'$.

13. Die Schwankungen des Merkur und der Venus in Breite [1]).

Alle Ausführungen des Ptolemäus über die Bewegungen der Planeten in Breite sind im XIII. Buche des Almagest enthalten. Das Wort „Breite" bei Ptolemäus bedeutet sowohl das, was wir heute darunter verstehen, als auch unser „Argument der Breite". Im XIII. Buche des Almagest ist mit „Breite" der senkrechte Abstand des Planeten von der Ekliptik gemeint. Während für die oberen Planeten der Deferent eine konstante Neigung zur Ekliptik und die Knotenlinie eine konstante Lage hat, treten für Merkur und Venus neue Komplikationen auf. Zwar ist bei beiden Planeten die Apsidenlinie senkrecht zur Knotenlinie des Deferenten, so daß Apogäum und Perigäum des Deferenten die größten Breiten haben. Die Knotenlinie ist
Fig. 23 auch bei ihnen unbeweglich, dagegen ist die Neigung der Deferentenebene zur Ekliptik variabel. Als die mittlere Lage der Deferentenebene kann man die Ekliptik bezeichnen, um diese mittlere Lage führt sie eine Schaukelbewegung aus, deren Periode mit einem Umlauf im Deferenten zusammenfällt. Befindet

[1]) Vgl. Manitius, Ptolemäus' Handbuch der Astronomie. II. S. 325 ff., S. 421 ff. Die Ausführungen von Herz, Gesch. d. Bahnbest. S. 143 ff. und Boelk, Darstellung und Prüfung der Merkurtheorie des Ptolemäus, S. 37, zu diesem Teile der Theorie sind sehr dürftig ausgefallen.

sich der Epizykelmittelpunkt in einem der beiden Knoten, so nimmt die Deferentenebene ihre mittlere Lage ein, fällt mit der Ekliptik zusammen. Befindet er sich in C oder C′, so hat der Neigungswinkel des Deferenten ein Maximum erreicht. Die Folge davon ist, daß der Epizykelmittelpunkt niemals auf die andere Seite der Ekliptik gelangt, sondern sie nur in den Knoten berührt. Der hierdurch entstehende Teil der Breite ist für Venus stets nördlich, bei Merkur stets südlich, mag der Epizykelmittelpunkt im Apogäum oder Perigäum des Deferenten stehen. Die Figur gilt für Venus, bei Merkur vollzieht sich die Bewegung der Deferentenhälfte unterhalb d. i. südlich der Ekliptikebene.

Bei Merkur und Venus bleibt sich der Epizykel während seines ganzen Umlaufes parallel, hat also eine konstante Neigung gegen die Deferentenebene. Die beiden Figuren 24 und 25 sind vom nördlichen Pol der Bahnebene gesehen zu denken. Der Deferent erscheint kreisförmig, die Epizykel perspektivisch verkürzt. Befindet sich der Epizykelmittelpunkt im Apogäum C und bewegt sich der Planet vom Epizykelapogäum π vorwärts, so geht er bei der Venus nach Norden, bei Merkur nach Süden.

Einen frei herumgetragenen Epizykel, der eine sich selbst parallel bleibende Lage beibehält, konnten die Alten sich nicht gut vorstellen. Sie beurteilten die Stellung des Epizykels nach seiner Neigung zum Visionsradius. Diese zerlegten sie in zwei Neigungen; nämlich die Neigung zweier bevorzugter, auf einander senkrechter Durchmesser des Epizykels. Der eine liegt im Visionsradius, geht durch die scheinbaren Apogäen des Epizykels; ihn kann man bezeichnen als den radialen Durchmesser oder kurz den Durchmesser des Epizykels, der andere ist auf diesem senkrecht, bringt die größten Elongationen hervor; ihn kann man als tangentialen Durchmesser oder kurz den Quermesser des Epizykels bezeichnen. Beide Durchmesser besitzen eine variable Neigung gegen die Deferentenebene. So zeigt Fig. 24 für die Venus, daß die Neigung des Durchmessers in C und C′ verschwindet, in den Knoten ein Maximum erreicht, dagegen die Neigung des Quermessers gerade in den Knoten verschwindet, dagegen in C und C′ den größten Betrag erreicht. Die Fig. 25 zeigt die entsprechenden Verhältnisse für Merkur. Sie sind anders, wie bei der Venus, was vor allem in den Vorzeichen zur Geltung kommt. Den Neigungswinkel des Durchmessers nennt Ptolemäus ἔγκλισις = Neigungswinkel des Epizykels, den Neigungs-

winkel des Quermessers nennt er λόξωσις = Winkel des Schiefstandes.

Die Figuren 26 und 27[1]) geben nun eine Vorstellung von der Lage und dem Verlauf dieser Neigungen bei Venus bzw. Merkur. Die Epizykeln sind in den Apogäen C und Perigäen C′, die mit den Grenzpunkten der Breite zusammenfallen, und in den Knoten ☊ und ☋ der Bahn dargestellt. Die Planeten sind in die Apogäen A und Perigäen P ihrer Epizykeln, sowie in die Berührungspunkte der Tangenten an die Epizykeln gesetzt, in denen für den Beobachter in E die größten Elongationen eintreten. Die genau berechneten Anomalien für diese Punkte sind bei Venus 138° und 222°, bei Merkur 111° und 249°. In den Figuren ließ sich dies nicht perspektivisch genau darstellen. In den Figuren ist der Ausgangspunkt der bei beiden Planeten zunächst nach Norden gerichteten Hebung des radialen Durchmessers, und zwar das in Frage kommende Perigäum des Epizykels mit P* bezeichnet. Ebenso ist der Ausgangspunkt der Hebung des tangentialen Durchmessers über seine punktiert gezeichnete Normallage, und zwar der auf der Abendseite des Epizykels liegende Endpunkt a des Quermessers, mit a* bezeichnet. Auch diese Hebung ist bei beiden Planeten zunächst nördlich gerichtet.

Für Venus verleiht der Neigungswinkel des Deferenten sowohl in der Erdferne wie in der Erdnähe dem im Apogäum oder Perigäum seines Epizykels stehenden Planeten eine nördliche Breite von $^1/_6{}^0$. Während der Epizykel sich bis zu den Knoten bewegt, nimmt dieser Winkel ab, bis er in den Knoten gleich Null wird, um von dort aus wieder bis zu seinem Maximum anzuwachsen.

Der Neigungswinkel des Epizykels ist im Apogäum und Perigäum des Deferenten gleich Null, nimmt dann zu bis zu seinem Maximum von $2^1{}_2{}^0$ in den Knoten. Befindet sich der Planet im Perigäum seines Epizykels, wenn der Epizykelmittelpunkt sich in den Knoten des Deferenten befindet, so erscheint dem Beobachter in E die größte nördliche und südliche Breite in ☊ und ☋, hervorgerufen durch Hebung des radialen Durchmessers, unter einem Winkel von 6°22′. Befindet er sich aber im Apogäum seines Epizykels, so erscheint die

[1]) Vgl. Manitius, Ptolemäus' Handbuch d. A. II. Seite 421 ff.

nördliche Breite in ♂ und die südliche Breite in ♀ unter einem Winkel von $1^0 2'$.

Der Winkel des Schiefstandes erreicht im Mittel ein Maximum von $3^1/_2{}^0$ und ist in den Knoten gleich Null. Wenn der Planet in seinen größten Elongationen von der mittleren Sonne sich befindet, so erhält durch dieses Maximum des Schiefstandes die Breite des Planeten im Apogäum des Deferenten für einen Beobachter in E einen Abzug (auf der Abendseite a) oder Zusatz (auf der Morgenseite m) von $2^0 27'$, im Perigäum des Deferenten aber einen Abzug (auf der Morgenseite m) oder Zusatz (auf der Abendseite a) von $2^0 34'$.

Für Merkur verleiht der Neigungswinkel des Deferenten dem im Apogäum oder Perigäum des Epizykels befindlichen Planeten sowohl in Erdferne wie Erdnähe eine südliche Breite von $^3/_4{}^0$. Dieser Winkel wird in den Knoten gleich Null.

Das Maximum des Neigungswinkels des Epizykels ist $6^1/_4{}^0$. Die Breite des Planeten erscheint dem Beobachter in E unter einem Winkel von $4^0 5'$, wenn der Planet sich im Perigäum seines Epizykels befindet, von $1^0 46'$, wenn er sich im Apogäum desselben befindet.

Der Winkel des Schiefstandes hat im Mittel ein Maximum von 7^0. Die dadurch bedingte Breite erscheint dem Auge in E in der Erdferne unter einem Winkel von $2^0 17'$, in der Erdnähe von $2^0 46'$.

Bei der Tabulierung[1]) verfährt Ptolemäus nun folgendermaßen:

In den Knoten der Bahn hängt die Breite offenbar nur von dem Winkel im Epizykel ab. Der durch die Pole des Epizykels gezogene Kreis dient zum Messen der Neigungswinkel des Epizykels. Dieser ist von derselben Größe wie der Epizykel selbst. Der Winkel, unter welchem der von dem Neigungswinkel unterspannte Bogen dieses Kreises dem Beobachter in E erscheint, ist gleich der Prosthaphäresis der Anomalie, welche einen gleichgroßen Abstand des Planeten von dem genauen Apogäum oder Perigäum des Epizykels mißt. Man kann also die Anomalietabellen in der sechsten Spalte benutzen, welche die Prosthaphäresis der Anomalie in der mittleren Entfernung bietet. Nach dieser Spalte in der Tabelle der Venus erscheint ein Epizykelbogen von 6^0 am

[1]) Vgl. Tafel IV.

Apogäum des Epizykels dem Beobachter unter einem Winkel von $2^0 30'$, sodaß auf einen Grad $0^0 25'$ entfallen; mithin wird ein Bogen des Meßkreises, der am Apogäum des Epizykels den Neigungswinkel von $2^1/_2{}^0$ überspannt, dem Beobachter unter einem Winkel von ($0^0 25' \times 2^1/_2 =$) $1^0 2'30''$ erscheinen.

Am Perigäum des Epizykels erscheint ein Epizykelbogen von 3^0 dem Beobachter unter einem Winkel $7^0 38'$, so daß auf einen Grad $2^0 33'$ kommen; mithin ergibt sich für einen Bogen des Meßkreises, der am Perigäum des Epizykels den Neigungswinkel von $2^1/_2{}^0$ überspannt, beim Beobachter ein Winkel von ($2^0 33' \times 2^1/_2 =$) $6^0 22'$.

Für Merkur kommen nach der sechsten Spalte der Anomalietabelle auf einen Grad am Apogäum des Epizykels ($98' : 6 =$) rund $0^0 17'$, mithin erscheint der am Apogäum den Neigungswinkel von $6^1/_4{}^0$ überspannende Bogen des Meßkreises dem Beobachter unter einem Winkel von ($0^0 17' \times 6^1/_4 =$) $1^0 46'$. Ptolemäus setzt $1^0 45'$. Auf einen Grad am Perigäum kommen $0^0 36'$, der Bogen des Meßkreises erscheint entsprechend unter einem Winkel von ($0^0 36' \times 6^1/_4 =$) $3^0 45'$. Ptolemäus hat $4^0 5'$, er hat also auf einen Grad am Perigäum statt $0^0 36'$ vielmehr $0^0 39'$ in Anrechnung gebracht.

Für die Tabulierung der Schiefstände nimmt Ptolemäus das Maximum zu $2^0 30'$ als Mittel für beide Planeten. Die Differenz dieses Mittelwertes gegenüber den im Apogäum und Perigäum gefundenen Werten erscheint ihm bei Venus so gering, daß er sie vernachlässigt. Es rührt diese Differenz her von der geringen Exzentrizität der Venusbahn, so daß für sie ohne großen Fehler die Erde im Mittelpunkte des Deferenten angenommen werden konnte. Bei Merkur aber macht sich die große Exzentrizität bemerkbar. Im Apogäum bleibt der Wert des Schiefstandes ($2^0 17'$) hinter dem Mittelwert ($2^0 30'$) um $13'$, also nahezu um $^1/_{10}$ des ganzen Betrages zurück, im Perigäum übertrifft der Wert des Schiefstandes ($2^0 46'$) den Mittelwert ($2^0 30'$) um $16'$, also wieder nahezu um $^1/_{10}$ des ganzen Betrages. Zwischen größter und mittlerer Entfernung ist der Mittelwert um $^1/_{10}$ zu verkleinern, zwischen mittlerer und kleinster Entfernung um $^1/_{10}$ zu vergrößern. (Dies trifft in der vierten Spalte der Tafel des Merkur für die ersten 15 Zeilen bzw. die darunterstehenden zu).

Die in den Tafeln angegebenen Werte für die beiden Neigungen gelten nur für den Fall, daß sich der Epizykel der Pla-

neten in den erwähnten ausgezeichneten Punkten der Bahn befindet. Für eine beliebige Lage des Epizykels setzt sich also die Breite aus einem Bruchteil der Neigung des Epizykels und einem solchen der Neigung des Schiefstandes zusammen. Zur Ermittelung dieser Bruchteile dient die fünfte Spalte der Tafeln, überschrieben „Sechzigstel", die mit dem Winkel im Deferenten entnommen werden. Die zahlenmäßigen Beträge der Neigungswinkel und Schiefstände sind nun nicht weit entfernt von dem Betrage (5^0), der bei dem schiefen Kreise des Mondes in Betracht kommt, und auch die Einzelbeträge der unter so kleinen Neigungswinkeln eintretenden Abweichungen (in Breite) stehen nahezu wieder in entsprechendem Verhältnis zu den wechselnden Breiten des Mondes. Ptolemäus hat darum (Almagest, 13. Buch. 4. Kapitel [Schluß]) die Ansätze der Breite in den Tafeln für den Mond mit 12 multipliziert d. h. die dort für die Breite des Mondes angesetzten Fünftel des Maximums von 5^0 sind für die Tabellen der Planeten in Sechzigstel eines mit 60 angenommenen Maximums verwandelt werden. So wird z. B. der zur Argumentzahl 30 gesetzte Bruchteil $4^1/_3$ von 5^0 der Breite des Mondes für die Planetentabellen nach dem Verhältnis $4^1/_3 : 5 = X : 60$ mit $X = 4^1/_3 \times 12$ das ist mit $52'$ gefunden.

Bei der Nachprüfung dieser Multiplikation fand Manitius für eine Reihe von Argumentzahlen einen Rechnungsfehler, der merkwürdigerweise stets auf ein Minus von 12" hinausläuft, eine Differenz, die auf das schließliche Ergebnis der Berechnung der Breite natürlich keinen wesentlichen Einfluß haben kann.

Die Multiplikation mit 12 ergibt:

12^0 u.	168^0	aus	$4^0\,54'$	nicht	$58'\,36''$	sondern	$58'\,48''$
24^0 „	156^0	„	$4^0\,34'$	„	$54'\,36''$	„	$54'\,48''$
36^0 „	144^0	„	$4^0\,3'$	„	$48'\,24''$	„	$48'\,36''$
42^0 „	138^0	„	$3^0\,43'$	„	$44'\,24''$	„	$44'\,36''$
72^0 „	108^0	„	$1^0\,33'$	„	$18'\,24''$	„	$18'\,36''$
78^0 „	102^0	„	$1^0\,3'$	„	$12'\,24''$	„	$12'\,36''$.

Hierüber bei den Argumentzahlen

99^0	aus	$0^0\,48'$	nicht	$9'\,24''$	sondern	$9'\,36''$
111^0	„	$1^0\,48'$	„	$21'\,24''$	„	$21'\,36''$
135^0	„	$3^0\,32'$	„	$42'\,12''$	„	$42'\,24''$
153^0	„	$4^0\,27'$	„	$53'\,12''$	„	$53'\,24''$
165^0	„	$4^0\,50'$	„	$57'\,48''$	„	$58'\,0''$.

(Ptolemäus, Handbuch d. A. II. Seite 428.)

Diese Sechzigstel in der fünften Spalte ergeben nun auch in sehr einfacher Weise noch die Neigung des Deferenten, den dritten und letzten Faktor der Breite. Dieser

Neigungswinkel, der im Mittelpunkt des Deferenten gebildet ist, beträgt für Venus z. B. im Maximum $^1/_6{}^0$ und entfällt stets auf nördliche Breite. Er wird nun, während der Epizykel vom nördlichen Grenzpunkt zum Knoten läuft, nicht nur dadurch kleiner, daß der Epizykelmittelpunkt sich immer mehr der Ekliptik nähert, sondern auch dadurch, daß sich gleichzeitig die Ebene des Deferenten zur Ebene der Ekliptik herabsenkt (Fig. 23), bis sie, wenn der Epizykelmittelpunkt in den Knoten anlangt, mit ihr zusammenfällt. Die Sechzigstel, nach denen man die Verkleinerung oder Vergrößerung dieses Neigungswinkels vorzunehmen hat, sind stets die der fünften Spalte, welche auf die Abnahme oder Zunahme des Schiefstandes entfallen: abnehmende, wenn die Länge im ersten und dritten Quadranten liegt, zunehmende, wenn im zweiten und vierten.

Für den Gebrauch der Breitentabellen gibt Ptolemäus folgende Anordnung: Zuerst gehen wir mit der genau berechneten Zahl der Anomalie in die Argumentzahlen ein und notieren uns die in der dritten und vierten Spalte der Breite stehenden Beträge getrennt, und zwar die aus den dritten Spalten ohne weiteres, dagegen den Betrag aus der vierten Spalte des Merkur mit Abzug von $^1/_{10}$ des Betrages, wenn die genau berechnete Länge in den ersten 15 Zeilen steht, und mit Zusatz von $^1/_{10}$, wenn in den darunter stehenden Zeilen.

Die Argumentzahlen sind von den Apogäen aus gerechnet. Für die Breite, die dem Epizykel aus der Neigung des Deferenten entsteht, sind aber die Zahlen der genau berechneten Länge maßgebend, die von den Grenzpunkten der größten Breite ab gezählt werden. Diese fallen nur bei Venus und Merkur genau mit dem Apogäum des Deferenten zusammen. Bei der Berechnung der scheinbaren Örter in Länge nimmt Ptolemäus Rücksicht auf das derzeitige Apogäum, nicht aber bei der Berechnung der Breite, und doch wäre gerade bei Venus und Merkur eine solche Rücksicht notwendig gewesen; denn je schneller ein Planet sich bewegt, um so mehr macht sich eine Veränderung in Breite bei ihm bemerkbar, und um so leichter und größer kann ein Fehler in der Berechnung auftreten, die für weit zurückliegende Jahrhunderte gemacht wird.

Über die von Ptolemäus geforderten Zusätze (vgl. S. 66) zur genauberechneten Länge bei der Venus und Merkur sagt Manitius II. Seite 426: Ist bei der Venus die genau berechnete Länge unter 90° d. h. steht der Epizykel zwischen dem nördlichen Grenzpunkt des erdfernen Halbkreises des Deferenten und dem Knoten am Ende des ersten Quadranten, so führt der Zusatz von 90° zu der Reihe der zunehmenden Sechzigstel des zweiten Quadranten, die von dem notierten Betrag des Neigungswinkels des Epizykels genommen werden sollen. Denn im ersten Quadranten des Deferenten d. i. vom Apogäum

bis zum Knoten, nimmt die südliche Breite des Planeten, welche der Neigungswinkel des Epizykels verleiht, von 0^0 bis $6^0\ 22'$ zu. Fällt die genau berechnete Länge aber in den zweiten Quadranten, in welchem die südliche Breite des Planeten mit dem Neigungswinkel bis zum Perigäum wieder abnimmt, so führt der Zusatz von 90^0 zu der Reihe der abnehmenden Sechzigstel des dritten Quadranten, die von dem notierten Betrag des Neigungswinkels genommen werden sollen. Daß durch denselben Zusatz der entsprechende Erfolg erreicht wird, wenn die genau berechnete Länge in den dritten und vierten Quadranten des Deferenten fällt, ist ohne weiteres klar (vgl. Manitius II. S. 427).

Bei dem Merkur wird als Zusatz zur genau berechneten Länge ein Halbkreis mehr als bei der Venus, d. s. 270^0, vorgeschrieben, weil bei ihm dem Neigungswinkel entsprechend die südliche Breite im dritten Quadranten, d. i. vom Perigäum ab bis zum Knoten zunimmt und im vierten Quadranten bis zum Apogäum wieder abnimmt. Fällt z. B. die Länge des Epizykels mit 183^0 in den dritten Quadranten, zu welchem in der Tabelle abnehmende Sechzigstel angesetzt sind, so führt der Zusatz 270^0 zu der Argumentzahl ($183^0 + 270^0 - 360^0 =$) 93^0 d. i. in die Reihe der zunehmenden Sechzigstel, zu welcher bei dem entsprechenden Stande des Epizykels der Venus in dem ersten Quadranten der Zusatz 90^0 führte. Dasselbe Ergebnis würde für den Merkur auch durch Abzug von 90^0 erreicht werden; in beiden Fällen wird die Argumentzahl der Länge in den vorhergehenden Quadranten verlegt, welcher die der Zunahme oder Abnahme des Neigungswinkels entsprechenden Sechzigstel enthält.

Keines Zusatzes bedarf es bei der Venus zur genau berechneten Länge um die Sechzigstel zu erhalten, welche die durch den Schiefstand verursachte Breite betreffen; denn da die nach Norden gehobene Abendseite des Epizykels im ersten Quadranten d. i. vom Apogäum zum Knoten, sich zur Ebene der Ekliptik herabsenkt, worauf sich im zweiten Quadranten bis zum Perigäum die Morgenseite wieder nach Norden emporhebt, so führen die gegebenen Grade der Länge ohne weiteres zu den erforderlichen ab- oder zunehmenden Sechzigsteln.

Bei dem Merkur vollzieht sich der entsprechende Verlauf des Schiefstandes im dritten und vierten Quadranten des Deferenten d. i. vom Perigäum bis zum Apogäum, mithin gleichfalls einen Halbkreis weiter vorwärts als bei der Venus. Nun stehen aber bei den genau berechneten Längen, welche in diese Quadranten fallen, d. h. bei den Argumentzahlen der zweiten Spalte von unten nach oben, dem Verlauf des Schiefstandes durchaus entsprechend, im dritten Quadranten abnehmende und im vierten Quadranten zunehmende Sechzigstel; die gegebene Länge führt also geradeso gut wie bei der Venus ohne weiteres zu den dem Verlaufe des Schiefstandes entsprechenden Sechzigsteln. Der Zusatz von 180^0, der die Argumentzahlen der zweiten Spalte zu den ebenfalls erst abnehmenden, dann zunehmenden Sechzigsteln des ersten und zweiten Quadranten führt, ist demnach in dieser Hinsicht belanglos, wird aber maßgebend für die Erzielung derjenigen Länge, von welcher der Ausfall nördlicher oder südlicher Breite des Schiefstandes abhängt. So führt z. B. die Länge von 20^0 ebenso gut wie die um 180^0 vermehrte Länge von 200^0 zu $^{58}/_{60}$, während nur letztere bei der unter 180^0 bleibenden Anomalienzahl 108 zu der erforderlichen südlichen Breite führt.

I. Alsdann addieren wir zur genau berechneten Länge jedesmal bei der Venus 90^0, bei dem Merkur 270^0, ziehen, wenn es geht, 360^0 Grad ab, und gehen mit dem Ergebnis in dieselben Argumentzahlen ein. So viel Sechzigstel, als in der fünften Spalte bei der Argumentzahl stehen, nehmen wir nun von den aus der dritten Spalte notierten Beträgen und stellen das Ergebnis fest. Dieses gibt 1. wenn die mit dem angegebenen Zusatze versehene Länge in den ersten 15 Zeilen steht, südliche Breite, wenn die genau berechnete Anomalie in den ersten 15 Zeilen steht, sonst nördliche Breite; 2. wenn die mit dem angegebenen Zusatze versehene Länge unter die ersten 15 Zeilen fällt, nördliche Breite, wenn die genau berechnete Anomalie in den ersten 15 Zeilen steht, sonst südliche Breite.

II. Nun gehen wir mit der genau berechneten Länge bei Venus ohne weiteres, bei Merkur unter Zusatz von 180^0 in dieselben Argumentzahlen ein, nehmen soviel Sechzigstel, als in der fünften Spalte dabei stehen, von den aus der vierten Spalte notierten Beträgen und stellen das Ergebnis fest. Dieses gibt an: 1. wenn die Länge in die ersten 15 Zeilen fiel, nördliche Breite, wenn die genau berechnete Anomalie bis 180^0 geht, südliche Breite, wenn sie über 180^0 geht; 2. wenn die Länge unter die ersten 12 Zeilen fällt, südliche Breite, wenn die genau berechnete Anomalie bis 180^0 geht, nördliche Breite, wenn sie über 180^0 hinausgeht.

III. Schließlich nehmen wir von den bei II. gebrauchten Sechzigsteln denselben Bruchteil und bringen von dem Ergebnis bei Venus $^1/_6$, was stets auf nördliche, und beim Merkur $^3/_4$ davon, was stets auf südliche Breite entfällt, noch in Ansatz.

Beispiel einer Breitenberechnung für Venus.

Es soll berechnet werden, welche Breite Venus am 29./30. Tybi (16. Dezember) 138 n. Chr. $^3/_4 5^h$ früh hatte. Die Länge war mit $208^0 14'$, die Anomalie mit $229^0 26'$ festgestellt. Zu letzterem Werte entnehmen wir aus der dritten Spalte $1^0 33'$ (Neigung des Epizykels) und aus der vierten Spalte $2^0 29'$ (Neigung des Schiefstandes).

Berechnet ist die Breite von $1^0 33'$ unter der Voraussetzung, daß der Epizykel in einem der Knoten sich befindet und der Planet auf dem Epizykel rund 50^0 über das Perigäum hinaus ist, mithin die größte Elongation als Morgenstern bereits einige Grade hinter sich hat. Bei einer Länge von 208^0 würde die

Breite von $1^0 33'$ erst im zweiten Knoten, das ist bei 270^0 Länge eintreten, denn im Perigäum, bei einer Länge von 180^0, also im Anfange des dritten Quadranten ist die Breite wie der Neigungswinkel gleich Null. Während der Epizykelmittelpunkt von 180^0 bis 208^0 fortschreitet, wächst der Neigungswinkel des Epizykels und wird der Planet in Breite gehoben, und zwar im Betrage der zunehmenden Sechzigstel, zu welchen die um 90^0 vermehrte Länge führt.

$208^0 + 90^0 = 298^0$, dazu gehören aus der fünften Spalte $^{28}/_{60}$; dies ist von dem Höchstbetrag der Breite $1^0 33'$, den der Planet in dem gegebenen Epizykelgrad erst im Knoten erreicht, abzuziehen. Wir erhalten als Breite $0^0 43'$ und zwar nördliche Breite.

Auch die durch den Schiefstand hervorgerufene Breite von $2^0 29'$ gilt nur für die Annahme, daß der Epizykel in einem der Knoten stehe und der Planet auf dem Epizykel den Berührungspunkt der Tangente auf der nach Norden gehobenen Morgenseite überschritten hat. $2^0 29'$ ist die Breite, die erst am Ende des zweiten Quadranten, das ist im Perigäum eintritt, wenn bei einer Länge von 180^0 der Planet durch das Maximum des Schiefstandes gehoben erscheint. Schreitet der Epizykel um 28^0 weiter fort, so muß der Winkel, unter dem der Schiefstand erscheint, kleiner werden und zwar entsprechend den abnehmenden Sechzigsteln der fünften Spalte, welche den Längen zwischen 180^0 und 270^0 entsprechen. 208^0 Länge entsprechen $^{52}/_{60}$, diese multipliziert mit $2^0 29'$ ergeben eine Breite von $2^0 9'$, und zwar nördliche Breite.

Für den dritten Faktor der Breite, die Neigung des Deferenten, müssen wir in Ansatz bringen $^{52}/_{60}$ von $^1/_6{}^0$, also $^{52}/_{60}$ von $0^0 10'$, das gibt $0^0 8' 40''$, davon sind wiederum $^{52}/_{60}$ in Ansatz zu bringen, das ergibt $0^0 7' 30'' = {}^1/_8{}^0$ als die durch die Neigung des Deferenten verursachte nördliche Breite des Planeten.

Die Berechnung konnte auch in folgender Form geführt werden:

$$\frac{52}{60} \times \frac{52}{60} \times \frac{1^0}{6} = \frac{2704}{3600} \times \frac{1^0}{6} = \frac{3}{4} \times \frac{1^0}{6} = \frac{1^0}{8} = 0^0 7' 30''.$$

Den Grund siehe Seite 60.

Somit setzt sich der Gesamtbetrag der nördlichen Breite der Venus aus den drei Teilbeträgen zusammen, nämlich

$$0^0 43' + 2^0 9' + 0^0 7' 30'' = 2^0 59' 30'',$$

wogegen Ptolemäus nur $2^0 40'$ findet.

Beispiel einer Breitenberechnung für Merkur.

Es soll die Breite berechnet werden, welche Merkur am 18./19. Thoth (15. November) 265 v. Chr. 7^h früh hatte. Die Länge war mit $42^0 58'$, die Anomalie mit $212^0 41'$ festgestellt. Zu dieser Anomalie liefert die dritte Spalte $2^0 57'$, die vierte Spalte $1^0 53'$ als Breite. Von $1^0 53'$ müssen, weil die Länge auf den erdfernen Halbkreis des Deferenten entfällt, $^1/_{10} = 0^0 11'$ abgezogen werden. Zu der um 270^0 vermehrten Länge ($42^0 58' + 270^0 =$) $312^0 58'$ gibt die fünfte Spalte $^{41}/_{60}$; diese, multipliziert mit $2^0 57'$, ergeben $2^0 1'$ nördliche Breite. Die um 180^0 vermehrte Länge ($42^0 58' + 180^0 =$) 223^0 ergeben in der fünften Spalte $^{43}/_{60}$; diese, multipliziert mit ($1^0 53' - 0^0 11' =$) $1^0 42'$ ergeben $1^0 12'$ nördlicher Breite. Endlich haben wir

$$\frac{43}{60} \times \frac{43}{60} \times \frac{3^0}{4} = \frac{1849}{3600} \times \frac{3^0}{4} = \frac{3^0}{8} = 0^0 23'$$

südlicher Breite. Das Endergebnis ist ($2^0 1' + 1^0 12' - 0^0 23' =$) $2^0 50'$ nördlicher Breite, welches die Angabe der Breite bei Ptolemäus nur um ein geringes überschreitet.

Schluß.

Was nun die Genauigkeit der Beobachtungen und Rechnungen des Ptolemäus in seinen Ausführungen über Merkur und Venus angeht, so haben sich in unserer Darstellung öfters Abweichungen von den ptolemäischen Werten ergeben. Das ist in verschiedenen Umständen begründet. So sind nicht alle Beobachtungen und Rechnungen auf dieselbe Epoche und denselben Beobachtungsort (Meridian von Alexandrien) reduziert [1]). Ferner gibt Ptolemäus die Stellung der Planeten oft in der Entfernung von einem Fixstern an und benutzt als Entfernungsmaß den Mondhalb- bzw. Durchmesser, variiert aber diese Einheit; ferner gibt er die Zeit der Beobachtung bisweilen mit, bisweilen ohne die Berücksichtigung der Zeitgleichung. In seinen Rechnungen liebt er kleine Zahlen in den Nennern der vorkommenden Brüche und rundet einmal schon während der Rechenoperation ab, einmal erst im Endergebnis. In früheren Zeiten hat man dem Ptolemäus wohl den Vorwurf gemacht, er habe seine Beobachtungen nicht selbst gemacht, sondern sie seinem

[1]) Vgl. de la Lande's zweites Memoire sur la théorie de Mercure, Paris 1766.

System entsprechend erfunden. Vor allem hat Delambre heftige und ungerechtfertigte Vorwürfe gegen den großen Alexandriner erhoben. So findet er es unter anderem sonderbar, daß Ptolemäus die Elongationen vom mittleren anstatt vom wahren Sonnenorte rechnet, und daß er die Symmetrieachse in ihrer Lage falsch bestimmt. Er meint, in der Merkurstheorie habe Ptolemäus die Erdbahn als kreisförmig und nur die Merkursbahn als exzentrisch angesehen. Das ist nicht richtig.

Aber in der Theorie des Ptolemäus lassen sich die Ungleichheiten, welche durch die Exzentrizität der Erdbahn und welche aus der Exzentrizität der Merkursbahn entstehen, nicht trennen. Darum ist auch eine analytische Fassung der Theorie z. B. des Merkur, wie sie Ptolemäus gibt, oder eine Darstellung der Ungleichheiten bei Ptolemäus in Reihenentwicklung ein sehr schwieriges Unternehmen. Auch alle Versuche, die Größe der Exzentrizität der Merkursbahn aus den ptolemäischen Konstanten bestimmen zu wollen, scheitern. Wenn man die Elongationen des Merkur unter Berücksichtigung der Exzentrizitäten und der Neigungen der großen Achsen berechnet, erkennt man den Grund, aus welchem Ptolemäus die Elongationen auf den mittleren und nicht auf den wahren Sonnenort bezieht[1]). Die Tafel V gibt die größten Elongationen vom mittleren und wahren Sonnenorte für Merkur, berechnet unter Zugrundelegung der von Newcomb für 1905 gegebenen Merkurelemente, ebenso die Elongationen nach Ptolemäus. Es zeigt sich in der Tafel, daß die größten Elongationen des Merkur von dem mittleren Orte sich in dem Intervalle von 19^0 bis 26^0 bewegen, dagegen von dem wahren Sonnenorte in dem größeren Intervalle von 17^0 bis 28^0.

Ferner zeigt die Tafel V, daß die Differenz zwischen dem kopernikanischen und ptolemäischen Systeme $^1/_2{}^0$ nicht übersteigt. Gerade die Komplikationen in der Planetentheorie, besonders des Merkur, die Zweiteilung der Exzentrizität, die Einführung der variablen Exzentrizität legt uns den Gedanken nahe, daß Ptolemäus seine Theorien den Beobachtungen anpaßte, nicht umgekehrt. Vielleicht hat er aus der Fülle der ihm zu Gebote stehenden Beobachtungen eine Auswahl als Grundlage für seine Theorien getroffen. In diesem Sinne weisen Encke und Mädler[2])

[1]) Vgl. Boelk, a. a. O. Seite 38 ff.

[2]) Vgl. Mädler, Gesch. d. Astr., Seite 74, 78.

die Vorwürfe Delambres gegen Ptolemäus zurück, da man von einem „Lehrbuch der Astronomie“ nicht jenen Grad der Genauigkeit in all seinen Angaben fordern dürfe, den man selbstverständlich bei dem „Beobachtungstagebuch einer Sternwarte“ stets voraussetzen müsse. Unerklärlich bleibt nur der Umstand, daß er durch seine Beobachtungen nicht die Entdeckung gemacht hat, daß der von Hipparch gefundene Präzessionswert zu klein sei, obschon er [1]) seine grundlegende Beobachtung des Regulus mit einer Gründlichkeit beschreibt, daß man sie als ein Musterbeispiel für die Handhabung des Astrolabs bezeichnen kann. Hipparch hatte die Präzession der Nachtgleichen zu mindestens 1^0 in 100 Jahren oder $36''$ in einem Jahre gefunden. Auf Grund von Beobachtungen durch Timocharis, Hipparch, Menelaus fand Ptolemäus auch 1^0 Präzession in 100 Jahren und ließ sich nun verleiten, die $36''$ nicht als untere Grenze, sondern als wirklichen Betrag der jährlichen Präzession anzusehen und zur Reduktion der Sternpositionen auf eine andere Epoche zu empfehlen. Zu weit würde man gehen, wenn man behaupten wollte, Ptolemäus habe seinen Sternkatalog nun einfach mit Hilfe der angenommenen Präzession aus dem Hipparchschen abgeleitet und dann in unredlicher Weise als auf neuen Beobachtungen beruhend ausgegeben. Man würde also dem Verfasser des Almagest unrecht tun, wenn man ihn, gegenüber dem alten ehrlichen Hipparchus nunquam satis laudatus (Plinius Nat. Hist. II. 95), als einen simplen „Kompilator und Plagiarius“ bezeichnen wollte [2]).

Eine gerechtere Würdigung der Verdienste des Ptolemäus würde die richtige Mitte zu halten haben zwischen den beiden Extremen; man kann zugeben, daß durch den Wunsch, auch als Beobachter zu glänzen, einiges Unlautere in seine Berichterstattung hineingekommen sein mag, aber darf nicht vergessen, daß dieser kleine Schatten durch die unbestrittenen Verdienste hundertfach aufgewogen wird. Sein ganzes Werk erfüllt den Leser mit Staunen über den Fleiß, die Gelehrsamkeit und den

[1]) Vgl. Manitius, Handbuch II., S. 14.

[2]) Gegen Ptolemäus sind z. B.: K. Manitius, Fixsternbeobachtungen des Altertums. Weltall 5. Jahrg. S. 406; F. Hultsch, Die Messungen der Größe und Entfernung der Sonne im Altertum. Weltall 1. Jahrg. S. 221; F. Hultsch, Die Sehnentafeln der griechischen Astronomen. Weltall 2. Jahrg. S. 54; A. A. Björnbo, Biblioth. mathemat. 1901. S. 196ff. — Für ihn: W. Foerster, Zur Ehrenrettung des Ptolemäus. Weltall 2. Jahrg. S. 16ff.; C. H. Peters, Astron. Nachr. Nr. 2803.

Scharfsinn seines Verfassers, und er begreift, daß dasselbe von jeher den höchsten wissenschaftlichen Leistungen des Altertums beigezählt wurde, ja im Mittelalter wie ein astronomisches Evangelium verehrt werden konnte, von dem abzuweichen beinahe ein Verbrechen war [1]).

Einer Befangenheit macht sich Ptolemäus aber auch in seiner Theorie der unteren Planeten schuldig [2]). Nachdem feststand, daß der Epizykelmittelpunkt von Merkur und Venus in der Richtung von der Erde zur Sonne liege, mußte er sich fragen, ob dieser Punkt diesseits oder jenseits der Sonne zu legen sei oder in die Sonne. Alle drei Beantwortungen hatten schon vor ihm ihre Vertreter. Das sogenannte „ägyptische System" bestand schon vor ihm, wenn er es auch garnicht erwähnt. Man sollte auch glauben, daß er, der uns das ganze Wissen der alexandrinischen Astronomen überliefert hat, es gekannt, wenigstens berührt die Ansicht Bailly's in seiner Histoire de l'astronomie, die ägyptischen Priester hätten diese Kenntnis allein gehabt und sie vor den Fachastronomen geheim gehalten, sehr eigentümlich, besonders da wir über die Lebensumstände und -verhältnisse des Ptolemäus nichts Genaueres wissen. Hätte Ptolemäus die Bahnen der beiden unteren Planeten gezwungenerweise um die Sonne gelegt und mit den drei oberen einen ähnlichen Versuch gewagt, so hätte er ein System gehabt, das die Beobachtungen seiner Zeit genau wiedergab, und es hätte nicht eines Tycho Brahe (1546—1601) in späterer Zeit bedurft, um dem „ägyptischen System" wieder Ansehen zu verschaffen. Aber die Sonne als Angelpunkt eines Systems schien das Schreckgespenst zu sein, vor dem er zurückschreckte [3]). Und doch war das so ängstlich festgehaltene Grundprinzip der Zentralstellung der Erde schon durch die Einführung des exzentrischen Kreises durchbrochen worden — unbewußt war er durch die Strömung der Tatsachen ergriffen und von der Kreisbewegung gegen die elliptische Bewegung hingetrieben worden [4]). Nun ist die Bewegung im Deferenten keine gleichmäßige mehr, was sie nach dem Grundprinzip sein soll; vielleicht hat er dies nicht bemerkt,

[1]) Vgl. Wolf, Handbuch der Astronomie. 1890. I. S. 532.

[2]) Vgl. Delambre II., S. 315; Herz I., S. 107.

[3]) Vgl. J. G. Hagen, Das ptolemäische Sonnensystem. (Stimmen aus Maria-Laach. 43. Bd. S. 252. 255.)

[4]) Vgl. Wolff, Geschichte der Astronomie, München 1877. S. 47.

sonst hätte diese Erkenntnis ihm ein Anlaß sein müssen, auch das Vorurteil der Zentralstellung der ruhenden Erde aufzugeben.

Die Theorie des Merkur und der Venus im Almagest ist ganz das Verdienst des Ptolemäus. Hipparch hat keine Planetentheorien aufgestellt; wenn er vielleicht auch in dieser Frage mehr geleistet hat, als uns Ptolemäus mitteilt. So mag er schon die Apogäen der Planeten bestimmt haben und zwar zu den Werten, die uns Plinius [1]) (23—79 n. Chr.) übermittelt. Auch hatte Apollonius schon die Anwendung der Epizykeltheorie wenigstens theoretisch auf die Planeten versucht. Mithin ist die Kombination der Theorien des exzentrischen Kreises und der Epizykeln sowie die Zweiteilung der Exzentrizität ureigenste Leistung des Scharfsinnes des Ptolemäus. Auch der Versuch der Babylonier, der alten „Chaldäer", z. B. den anomalistischen Lauf des Merkur darzustellen, war nach F. X. Kuglers Meinung verfrüht. Wenn man aber den Wert einer Planetentheorie danach beurteilt [2]), ob es mit ihrer Hilfe möglich ist, Tafeln aufzustellen, aus denen man für lange Zeiträume die Örter der Planeten möglichst genau berechnen kann, so ist die Theorie der unteren Planeten, Merkur und Venus, in dem Gesamtsystem des Ptolemäus eine gute und für seine Zeit eine hohe wissenschaftliche Leistung. Wenn ein Vergleich seiner Tafeln mit neueren Planetentafeln [3]) für das Jahr 130 n. Chr. beim Merkur einen Unterschied bis fast zu 7^0, wie ihn schon J. J. von Littrow früher gefunden hat [4]), und für Venus einen etwas geringeren Unterschied ergab, so trägt hieran nicht die komplizierte Theorie der unteren Planeten allein die Schuld. Nicht die Unzulänglichkeit der Theorie, sondern vornehmlich der Umstand, daß Ptolemäus die absolute Größe der Präzession nicht mit genügender Sicherheit feststellen konnte, wie dies bei den einfachen Beobachtungsmitteln durchaus erklärlich ist, ist der Grund für die gefundene Tafel-Differenz. Darum wagten auch die arabischen Astronomen in den späteren Jahrhunderten nicht an der Theorie des Ptolemäus zu rütteln, sondern suchten nur den jährlichen Wert der

[1]) Plinius, Historia naturalis II. Kap. 16.

[2]) Vgl. Würdigung der Epizykeltheorie in Whewell, Geschichte der induktiven Wissenschaften. I. Stuttgart. 1840. S. 150 ff.

[3]) P. V. Neugebauer, Tafeln zur astronomischen Chronologie II.; Tafeln für Sonne, Planeten und Mond. Leipzig 1914.

[4]) Littrow, Wunder des Himmels. Berlin 1897. S. 313.

Präzession genauer festzustellen (Al Batani [um 890 n. Chr.] 55″, Nassir-Eddin [1201—1274] 51″) und dann an eine Neubestimmung der astronomischen Konstanten auf Grund neuer Beobachtungen heranzugehen. Unter Zugrundelegung dieser Konstanten legten sie dann ganz im Sinne und Geiste des Ptolemäus, also unter Beibehaltung seines unveränderten Systems, neue Planetentafeln an. So sind die Toledanischen und Alfonsinischen Tafeln (13. Jhdt.) entstanden; so findet sich die unveränderte ptolemäische Planetentheorie noch in Peurbachs (1423—1461) „Theoricae novae planetarum“ und in den darauf beruhenden Ephemeriden Regismontans (Johann Müller 1436—1476) vor. In mehr als einem Jahrtausend wußten also die Astronomen nichts Besseres an die Stelle der ptolemäischen Theorien zu setzen.

I. Tafel für die Bewegung der Venus in Länge.

Apogäum δ $16^0\,10'$.

1. Argument-zahlen	2.	3. Prostha-phäresis der Länge	4. Korrek-tion	5. Differenz der Abnahme	6. Prosthaphä-resis der Anomalie	7. Differenz der Zunahme	8. Sechzigstel
6^0	354^0	$0^0\,14'$	$+\,0^0\,1'$	$0^0\,1'$	$2^0\,31'$	$0^0\,2'$	$-\,59'\,10''$
12	348	0 28	+ 0 1	0 3	5 1	0 4	— 57 55
18	342	0 42	+ 0 1	0 5	7 31	0 6	— 56 40
24	336	0 56	+ 0 2	0 7	10 1	0 8	— 55 0
30	330	1 9	+ 0 2	0 9	12 30	0 10	— 52 55
36	324	1 21	+ 0 2	0 11	14 58	0 12	— 49 35
42	318	1 32	+ 0 3	0 13	17 25	0 14	— 45 50
48	312	1 43	+ 0 3	0 15	19 51	0 16	— 42 5
54	306	1 53	+ 0 3	0 18	22 15	0 18	— 37 5
60	300	2 1	+ 0 2	0 20	24 38	0 20	— 31 40
66	294	2 8	+ 0 2	0 22	26 37	0 23	— 26 15
72	288	2 14	+ 0 2	0 24	29 14	0 25	— 20 25
78	282	2 18	+ 0 1	0 27	31 27	0 28	— 14 35
84	276	2 21	+ 0 1	0 29	33 38	0 30	— 8 20
90	270	2 23	+ 0 1	0 31	35 44	0 33	— 1 40
93	267	2 23	— 0 0	0 33	36 40	0 36	+ 1 31
96	264	2 23	— 0 1	0 35	37 43	0 38	+ 4 42
99	261	2 22	— 0 1	0 38	38 40	0 40	+ 7 39
102	258	2 21	— 0 1	0 40	39 35	0 43	+ 10 35
105	255	2 20	— 0 1	0 42	40 29	0 45	+ 13 32
108	252	2 18	— 0 1	0 45	41 20	0 47	+ 16 28
111	249	2 16	— 0 1	0 47	42 9	0 50	+ 19 25
114	246	2 13	— 0 2	0 49	42 54	0 52	+ 22 21
117	243	2 10	— 0 2	0 52	43 35	0 55	+ 25 18
120	240	2 6	— 0 2	0 54	44 12	0 58	+ 28 14
123	237	2 2	— 0 2	0 57	44 45	1 1	+ 31 0
126	234	1 58	— 0 2	1 0	45 15	1 4	+ 33 44
129	231	1 54	— 0 2	1 3	45 36	1 8	+ 36 18
132	228	1 49	— 0 3	1 6	45 51	1 11	+ 38 50
135	225	1 44	— 0 3	1 10	45 55	1 14	+ 41 11
138	222	1 39	— 0 3	1 14	45 57	1 18	+ 43 32
141	219	1 33	— 0 3	1 19	45 45	1 22	+ 45 42
144	216	1 27	— 0 2	1 24	45 20	1 27	+ 47 51
147	213	1 21	— 0 2	1 29	44 40	1 33	+ 49 37
150	210	1 14	— 0 2	1 33	43 39	1 38	+ 51 23
153	207	1 7	— 0 2	1 37	42 18	1 43	+ 52 46
156	204	1 0	— 0 2	1 39	40 28	1 48	+ 54 8
159	201	0 53	— 0 2	1 41	38 7	1 51	+ 55 18
162	198	0 46	— 0 1	1 42	35 7	1 52	+ 56 26
165	195	0 39	— 0 1	1 38	31 24	1 50	+ 57 28
168	192	0 32	— 0 1	1 31	26 46	1 43	+ 58 26
171	189	0 24	— 0 1	1 19	21 15	1 27	+ 59 1
174	186	0 16	— 0 1	0 58	17 47	1 5	+ 59 36
177	183	0 8	— 0 1	0 31	7 38	0 35	+ 59 58
180	180	0 0	— 0 0	0 0	0 0	0 0	+ 60 0

II. Tafel für die Bewegung des Merkurs in Länge.

Apogäum ♎ $1^0 10'$.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Argument-zahlen		Prostha-phäresis in Länge	Korrek-tion	Differenz der Abnahme	Prosthaphä-resis der Anomalie	Differenz der Zunahme	Sechzigstel
6^0	354^0	$0^0\ 18'$	$-\ 0^0\ 1'$	$0^0\ 10'$	$1^0\ 38'$	$0^0\ 5'$	$-\ 59'\ 20''$
12	348	0 34	− 0 2	0 20	3 16	0 11	− 57 20
18	342	0 51	− 0 4	0 24	4 53	0 17	− 54 40
24	336	1 7	− 0 5	0 39	6 29	0 23	− 50 40
30	330	1 22	− 0 5	0 49	8 4	0 28	− 45 40
36	324	1 37	− 0 4	0 59	9 36	0 34	− 39 40
42	318	1 51	− 0 4	1 8	11 6	0 40	− 33 0
48	312	2 4	− 0 3	1 18	12 33	0 45	− 25 40
54	306	2 15	− 0 1	1 28	13 58	0 50	− 18 0
60	300	2 25	0 0	1 39	15 18	0 56	− 10 20
66	294	2 34	+ 0 2	1 49	16 33	1 4	− 2 20
72	288	2 41	+ 0 4	1 59	17 43	1 11	+ 9 14
78	282	2 46	+ 0 6	2 9	18 47	1 17	+ 20 0
84	276	2 50	+ 0 7	2 19	19 44	1 23	+ 29 44
90	270	2 52	+ 0 9	2 29	20 33	1 29	+ 39 28
93	267	2 52	+ 0 10	2 34	20 54	1 32	+ 43 31
96	264	2 52	+ 0 10	2 39	21 14	1 35	+ 47 34
99	261	2 51	+ 0 11	2 44	21 29	1 38	+ 50 0
102	258	2 50	+ 0 10	2 48	21 42	1 41	+ 52 26
105	255	2 48	+ 0 10	2 53	21 52	1 44	+ 54 52
108	252	2 46	+ 0 10	2 58	21 59	1 46	+ 57 18
111	249	2 44	+ 0 9	3 2	22 2	1 49	+ 58 23
114	246	2 41	+ 0 9	3 4	22 1	1 52	+ 59 28
117	243	2 37	+ 0 9	3 6	21 56	1 55	+ 59 44
120	240	2 33	+ 0 8	3 8	21 47	1 57	+ 60 0
123	237	2 28	+ 0 7	3 9	21 33	1 59	+ 59 44
126	234	2 23	+ 0 7	3 10	21 15	2 0	+ 59 23
129	231	2 18	+ 0 6	3 12	20 53	2 0	+ 58 39
132	228	2 12	+ 0 6	3 12	20 25	2 1	+ 57 50
135	225	2 6	+ 0 5	3 9	19 50	2 1	+ 56 46
138	222	2 0	+ 0 4	3 6	19 10	2 0	+ 55 41
141	219	1 53	+ 0 4	3 2	18 24	2 0	+ 54 3
144	216	1 46	+ 0 3	2 57	17 32	1 58	+ 52 26
147	213	1 38	+ 0 3	2 51	16 35	1 53	+ 50 48
150	210	1 30	+ 0 3	2 42	15 31	1 47	+ 49 11
153	207	1 22	+ 0 2	2 32	14 20	1 41	+ 47 34
156	204	1 13	+ 0 2	2 21	13 3	1 34	+ 45 57
159	201	1 5	+ 0 1	2 9	11 41	1 26	+ 44 36
162	198	0 56	+ 0 1	1 55	10 13	1 17	+ 43 15
165	195	0 46	+ 0 1	1 38	8 40	1 7	+ 42 26
168	192	0 38	0 0	1 19	7 1	0 56	+ 41 37
171	189	0 28	0 0	1 1	5 19	0 43	+ 40 48
174	186	0 19	0 0	0 42	3 35	0 28	+ 40 0
177	183	0 9	0 0	0 21	1 48	0 14	+ 39 44
180	180	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	+ 39 28

III. Tafel für die Stillstände.

Argument-zahlen		Venus				Merkur			
		1. Still-stand		2. Still-stand		1. Still-stand		2. Still-stand	
0	360	165°	51′	194°	9′	147°	14′	212°	46′
6	354	165	52	194	8	147	13	212	47
12	348	165	53	194	7	147	8	212	52
18	342	165	55	194	5	147	1	212	59
24	336	165	57	194	3	146	51	213	9
30	330	166	0	194	0	146	39	213	21
36	324	166	4	193	56	146	25	213	35
42	318	166	9	193	51	146	11	213	49
48	312	166	15	193	45	145	55	214	5
54	306	166	22	193	38	145	39	214	21
60	300	166	29	193	31	145	23	214	37
66	294	166	35	193	25	145	8	214	52
72	288	166	42	193	18	144	58	215	2
78	282	166	50	193	10	144	52	215	8
84	276	166	58	193	2	144	46	215	14
90	270	167	7	192	53	144	40	215	20
96	264	167	14	192	46	144	36	215	24
102	258	167	21	192	39	144	33	215	27
108	252	167	28	192	32	144	30	215	30
114	246	167	35	192	25	144	30	215	30
120	240	167	43	192	17	144	29	215	31
126	234	167	50	192	10	144	29	215	31
132	228	167	56	192	4	144	30	215	30
138	222	168	1	191	59	144	31	215	29
144	216	168	6	191	54	144	33	215	27
150	210	168	10	191	50	144	35	215	25
156	204	168	14	191	46	144	37	215	23
162	198	168	17	191	43	144	38	515	22
168	192	168	19	191	41	144	39	215	21
174	186	168	20	191	40	144	40	215	20
180	180	168	21	191	39	144	40	215	20

IV. Breitentabellen.

Argument-zahlen vom Apogäum		Venus						Merkur					
		Neigungs-winkel		Schief-stand		Sech-zigstel		Neigungs-winkel		Schief-stand		Sech-zigstel	
6°	354°	1°	2′	0°	8′	59′	36″	1°	45′	0°	11′	59′	36″
12	348	1	1	0	16	58	36	1	44	0	22	58	36
18	342	1	0	0	25	57	0	1	43	0	33	57	0
24	336	0	59	0	33	54	36	1	40	0	44	54	36
30	330	0	57	0	41	52	0	1	36	0	55	52	0
36	324	0	55	0	49	48	24	1	30	1	6	48	24
42	318	0	51	0	57	44	24	1	23	1	16	44	24
48	312	0	46	1	5	40	0	1	16	1	26	40	0
54	306	0	41	1	13	35	12	1	08	1	35	35	12
60	300	0	35	1	20	30	0	0	59	1	44	30	0
66	294	0	29	1	28	24	24	0	49	1	52	24	24
72	288	0	23	1	35	18	24	0	38	2	0	18	24
78	282	0	16	1	42	12	24	0	26	2	7	12	24
84	276	0	8	1	50	6	24	0	16	2	14	6	24
90	270	0	0	1	57	0	0	0	0	2	20	0	0
93	267	0	5	2	0	3	12	0	8	2	23	3	12
96	264	0	10	2	3	6	24	0	15	2	25	6	24
99	261	0	15	2	6	9	24	0	23	2	27	9	24
102	258	0	20	2	9	12	24	0	31	2	28	12	24
105	255	0	26	2	12	15	24	0	40	2	29	15	24
108	252	0	32	2	15	18	24	0	48	2	29	18	24
111	249	0	38	2	17	21	24	0	57	2	30	21	24
114	146	0	44	2	20	24	24	1	6	2	30	24	24
117	243	0	50	2	22	27	12	1	16	2	30	27	12
120	240	0	59	2	24	30	0	1	25	2	29	30	0
123	237	1	8	2	26	32	36	1	35	2	28	32	36
126	234	1	18	2	27	35	12	1	45	2	26	35	12
129	231	1	28	2	29	37	36	1	55	2	23	37	36
132	228	1	38	2	30	40	0	2	6	2	20	40	0
135	225	1	48	2	30	42	12	2	16	2	16	42	12
138	222	1	59	2	30	44	24	2	27	2	11	44	24
141	219	2	11	2	29	46	36	2	37	2	6	46	36
144	216	2	23	2	28	48	24	2	47	2	0	48	24
147	213	2	43	2	26	50	12	2	57	1	53	50	12
150	210	3	3	2	22	52	0	3	7	1	46	52	0
153	207	3	23	2	18	53	12	3	17	1	38	53	12
156	204	3	44	2	12	54	36	3	26	1	29	54	36
159	201	4	5	2	4	56	0	3	34	1	20	56	0
162	198	4	26	1	55	57	0	3	42	1	10	57	0
165	195	4	49	1	42	57	48	3	48	0	59	57	48
168	192	5	13	1	27	58	36	3	54	0	48	58	36
171	189	5	36	1	9	59	12	3	58	0	36	59	12
174	186	5	52	0	48	59	36	4	2	0	24	59	36
177	183	6	7	0	25	59	48	4	4	0	12	59	48
180	180	6	22	0	0	60	0	4	5	0	0	60	0

V.

Apogäum 317° 55′.

Argument-zahlen	Westl. Elongat. nach Ptolemäus	Westl. Elongat. vom mittleren Sonnen-orte	Diffe-renz	Westl. Elongat. vom wahren Sonnen-orte	Östl. Elongat. nach Ptolemäus	Östl. Elongat. vom mittleren Sonnen-orte	Diffe-renz	Östl. Elongat. vom wahren Sonnen-orte
0	20° 49′	20° 43	— 6′	22° 1′	20° 49′	20° 53′	+ 4′	19° 35′
10	20 22	20 15	— 7	21 19	21 19	21 16	— 3	20 14
20	20 0	19 51	— 9	20 35	21 51	21 41	— 10	20 57
30	19 41	19 32	— 9	19 56	22 25	22 8	— 17	21 44
40	19 28	19 18	— 10	19 22	22 59	22 37	— 22	22 33
50	19 19	19 10	— 9	18 54	23 33	23 7	— 26	23 23
60	19 15	19 7	— 8	18 31	24 6	23 37	— 29	24 13
70	19 16	19 8	— 8	18 13	24 36	24 6	— 30	25 1
80	19 23	19 14	— 9	18 3	25 1	24 34	— 27	25 45
90	19 34	19 25	— 9	17 59	25 22	24 58	— 24	26 24
100	19 50	19 40	— 10	18 2	25 37	25 18	— 19	26 56
110	20 11	19 59	— 12	18 12	25 45	25 32	— 13	27 17
120	20 36	20 22	— 14	18 29	25 46	25 40	— 6	27 33
130	21 4	20 48	— 16	18 53	25 40	25 41	+ 1	27 36
140	21 35	21 18	— 17	19 24	25 28	25 34	+ 6	27 28
150	22 7	21 51	— 16	20 2	25 10	25 19	+ 9	27 8
160	22 41	22 26	— 15	20 45	24 47	24 57	+ 10	26 38
170	23 15	23 3	— 12	21 33	24 19	24 28	+ 9	25 58
180	23 48	23 40	— 8	22 24	23 48	23 54	+ 6	25 10
190	24 19	24 17	— 2	23 17	23 15	23 18	+ 3	24 18
200	24 47	24 54	+ 7	24 11	22 41	22 42	+ 1	23 25
210	25 10	25 21	+ 11	24 57	22 7	22 3	— 4	22 27
220	25 28	25 45	+ 17	25 40	21 35	21 28	— 7	21 33
230	25 40	26 1	+ 21	26 17	21 4	20 58	— 6	20 42
240	25 46	26 10	+ 24	26 45	20 36	20 31	— 5	19 56
250	25 45	26 10	+ 25	27 3	20 11	20 10	— 1	19 17
260	25 37	26 2	+ 25	27 12	19 50	19 54	+ 4	18 44
270	25 22	25 46	+ 24	27 11	19 34	19 43	+ 9	18 18
280	25 1	25 23	+ 22	27 0	19 23	19 36	+ 13	17 59
290	24 36	24 55	+ 19	26 41	19 16	19 34	+ 18	17 48
300	24 6	24 21	+ 15	26 14	19 15	19 36	+ 21	17 43
310	23 33	23 45	+ 12	25 40	19 19	19 41	+ 22	17 46
320	22 59	23 7	+ 8	25 1	19 28	19 49	+ 21	17 55
330	22 25	22 28	+ 3	24 18	19 41	20 1	+ 20	18 11
340	21 51	21 51	0	23 30	20 0	20 15	+ 15	18 33
350	21 19	21 15	— 6	22 47	20 22	20 33	+ 11	19 1
360	20 49	20 43	— 6	22 1	20 49	20 53	+ 4	19 35

Lebenslauf.

Am 25. Dezember 1874 bin ich, Carl, Heinrich, Josef Schumacher, katholischen Glaubens, in Minden (Westfalen) geboren. Ich besuchte bis Ostern 1889 die Volksschule in Bünde (Westfalen), darauf das Gymnasium in Bochum, das ich Ostern 1894 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Dann studierte ich in Paderborn und Bonn Theologie und wurde am 16. April 1898 in Paderborn zum Priester geweiht. Nach einjähriger Tätigkeit in der Seelsorge wurde ich im Schuldienst beschäftigt, bezog aber Ostern 1901 die Universität Berlin zu mathematischen und naturwissenschaftlichen Studien, die ich in Münster fortsetzte. Ich hörte in Astronomie, Mathematik und Physik die Vorlesungen der Herren

in Berlin:

von Bezold (†), Bauschinger, Blasius, Gehrke, Foerster, Frobenius, Helmert, Hensel, Hettner, Landau, Lehman-Filhés (†), Marcuse, Planck, Pringsheim, Scheiner (†), H. A. Schwartz, Warburg;

in Münster:

Killing, von Lilienthal, Reinganum, Plassmann.

Den Herren Professoren Bauschinger und Foerster bin ich zu ganz besonderem Danke für ihr gütiges förderndes Wohlwollen verpflichtet.

In Münster bestand ich am 27. März 1900 die Prüfung als Rektor an Mittelschulen und höheren Mädchenschulen mit fremdsprachlichem Unterrichte und am 23. Januar 1905 die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen in Preußen.

Seit dem 1. April 1909 bin ich am Realgymnasium der Stadt Sterkrade als Oberlehrer angestellt.

Die Doktorprüfung bestand ich am 9. Dezember 1916.

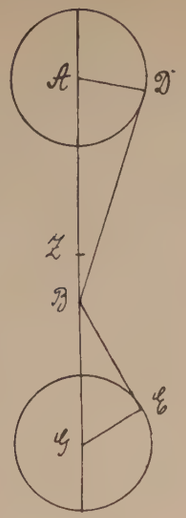

Fig. 1*

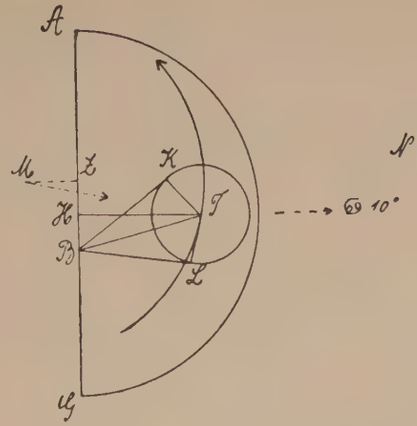

Fig 2*

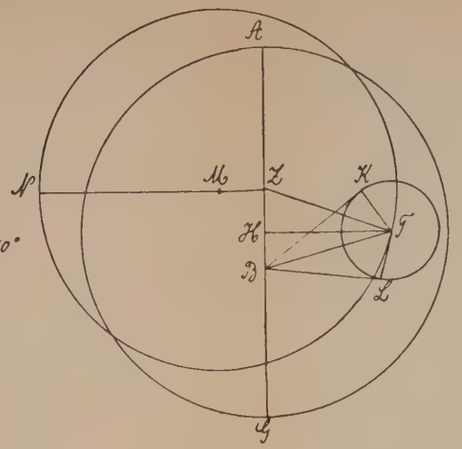

Fig. 3*

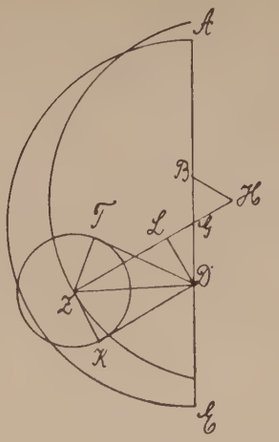

Fig. 4*

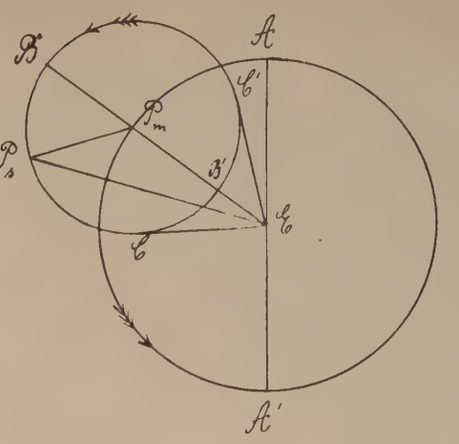

Fig. 3a

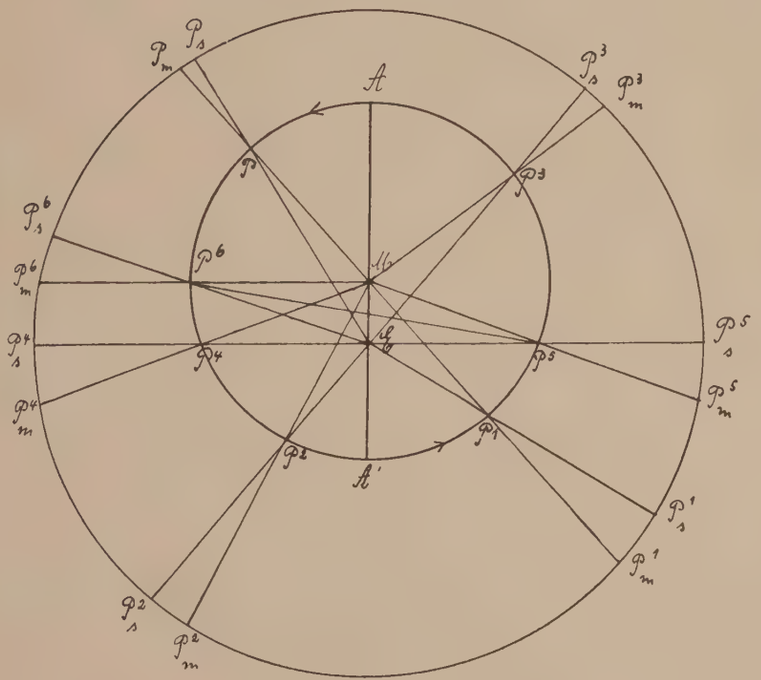

Fig. 2

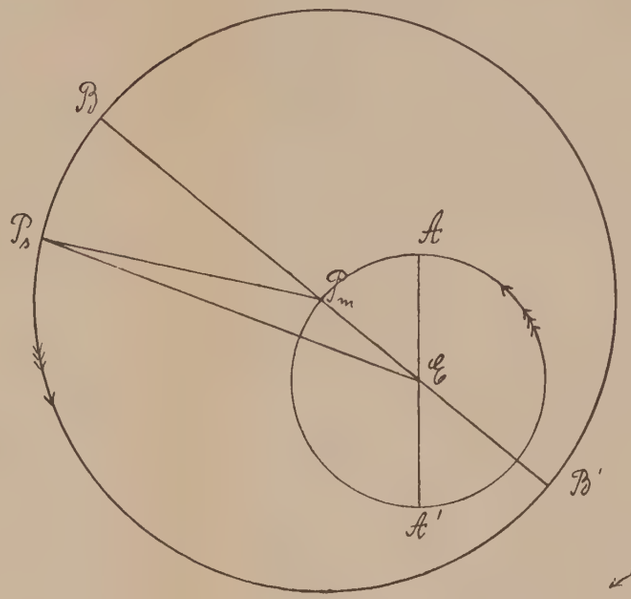

Fig. 3b

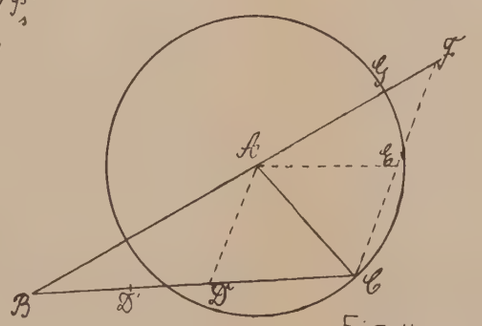

Fig. 4

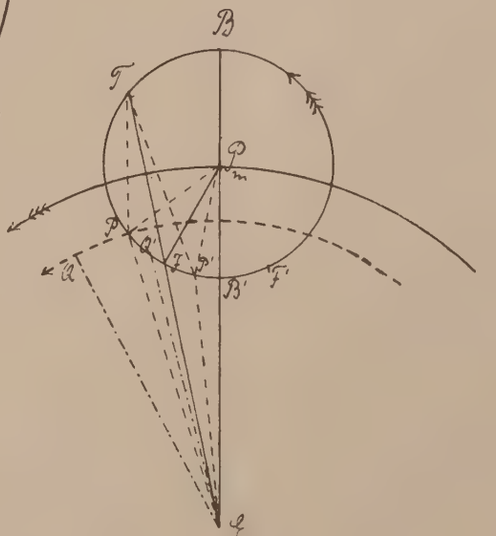

Fig. 5

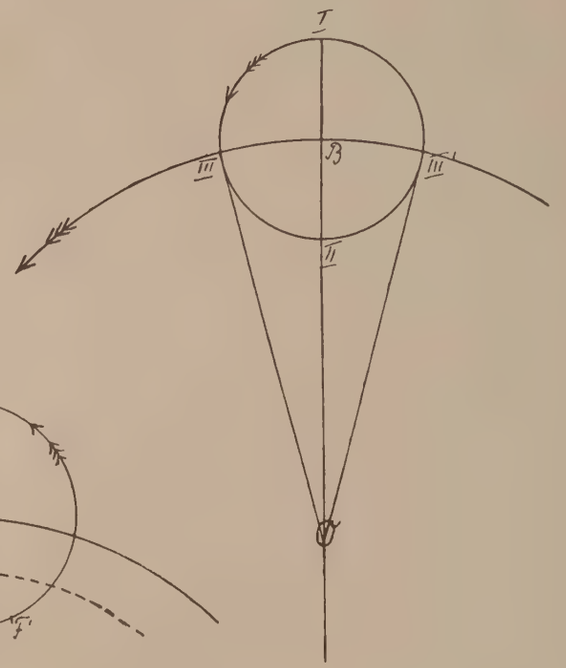

Fig 6

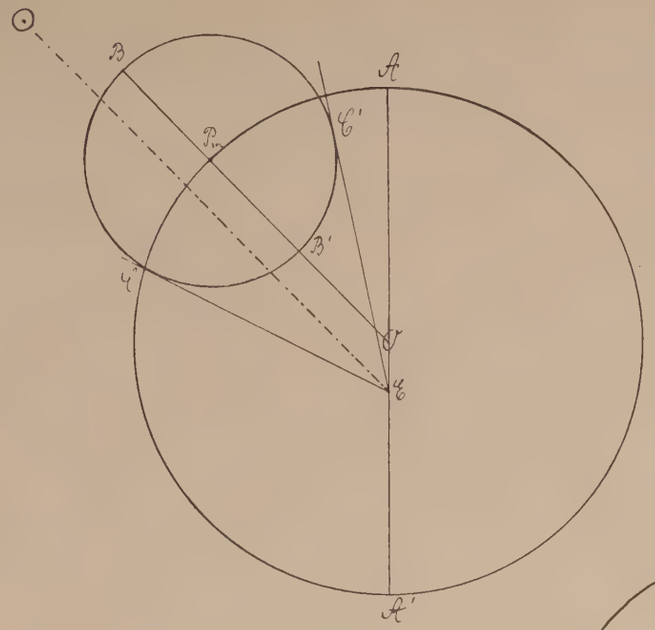

Fig. 7.

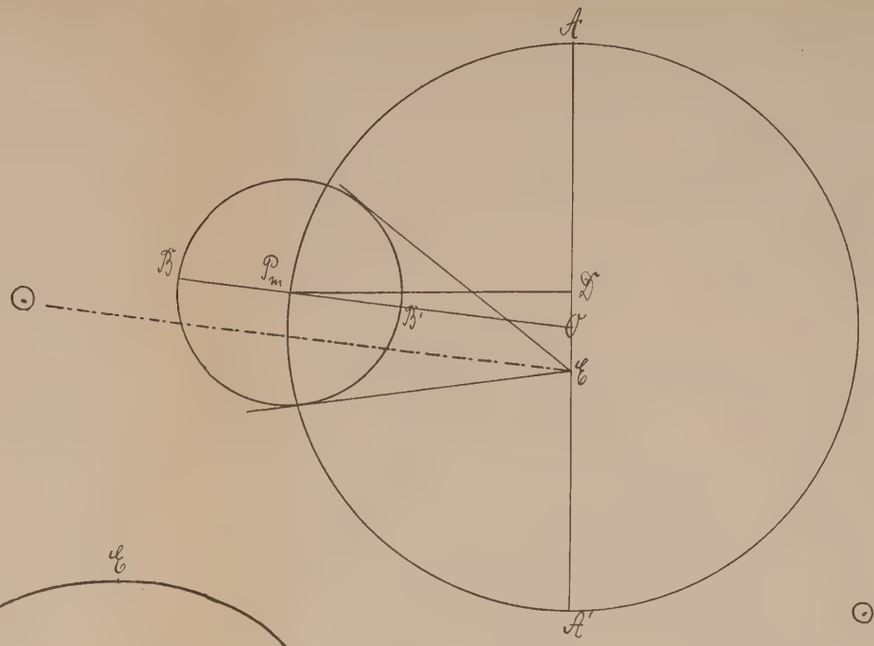

Fig. 8.

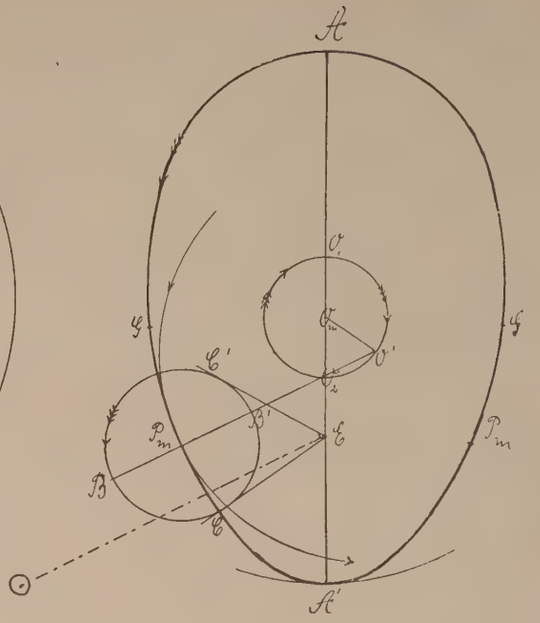

Fig. 9.

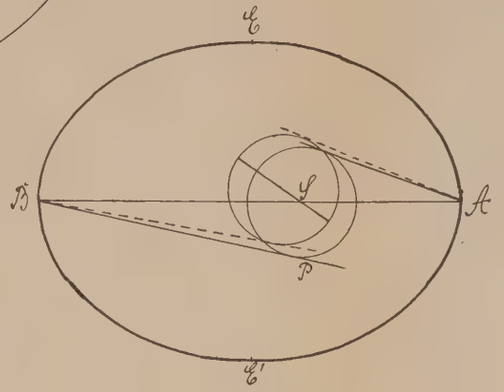

Fig. 10.

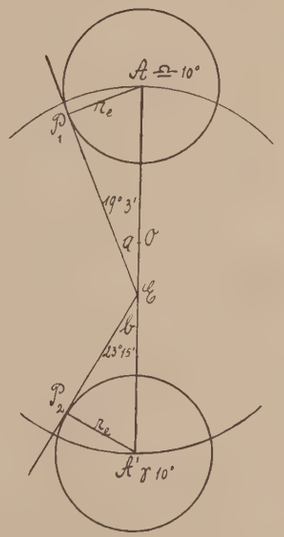

Fig. 12.

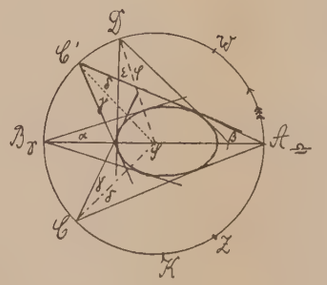

Fig. 11.

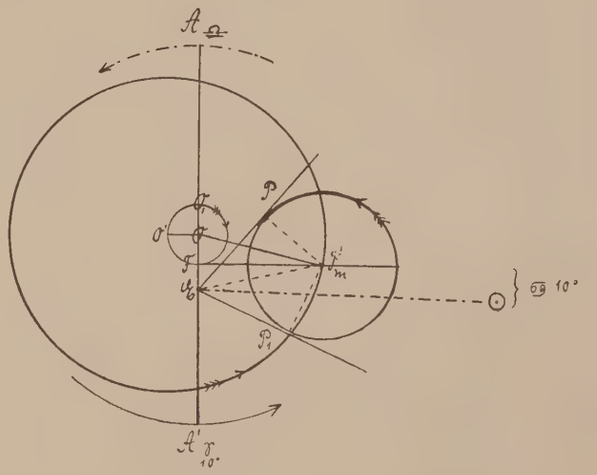

Fig. 13.

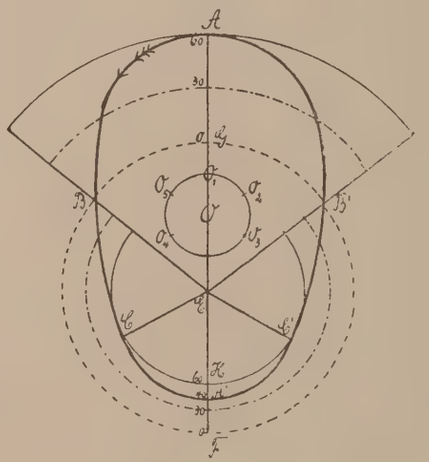

Fig. 14.

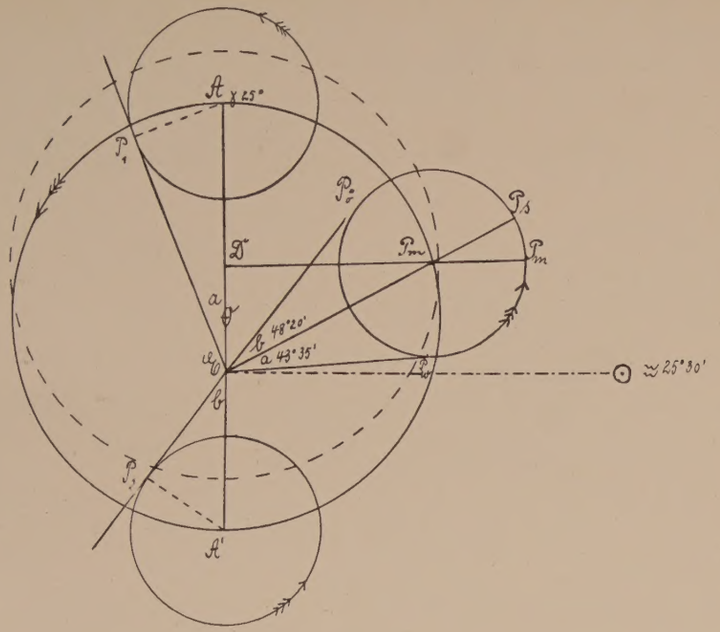

Fig. 15.

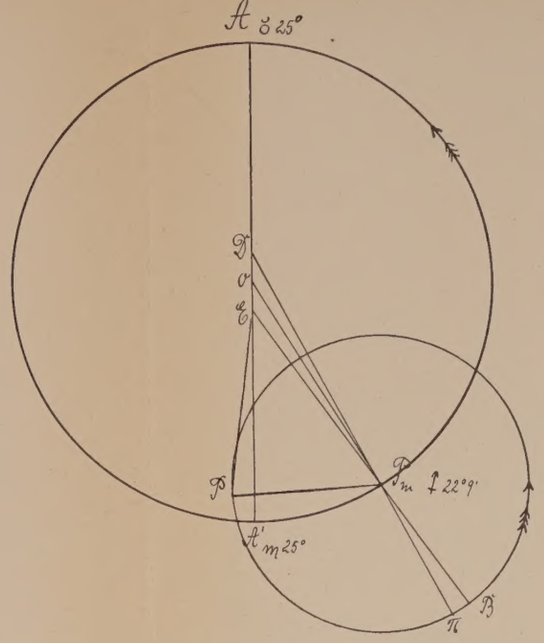

Fig. 16.

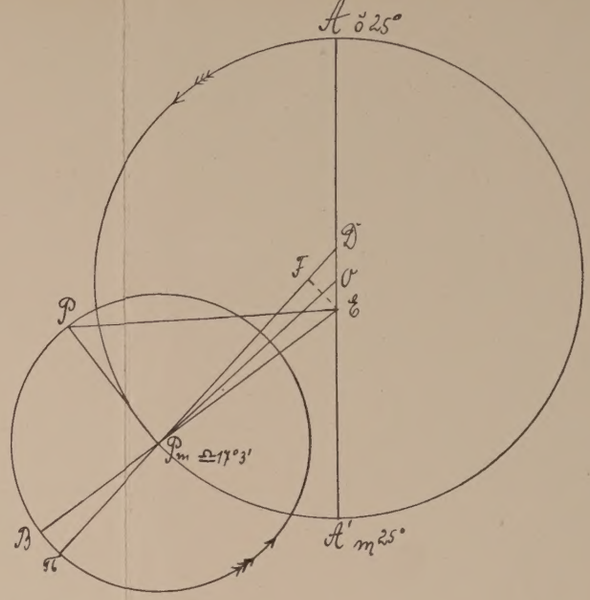

Fig. 17.

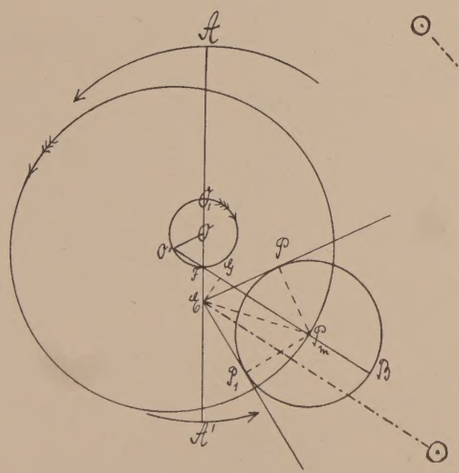

Fig. 18.

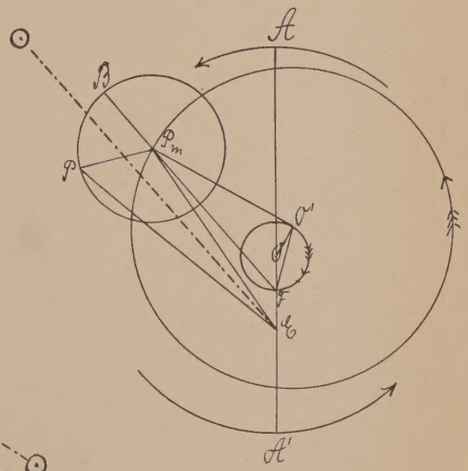

Fig. 19.

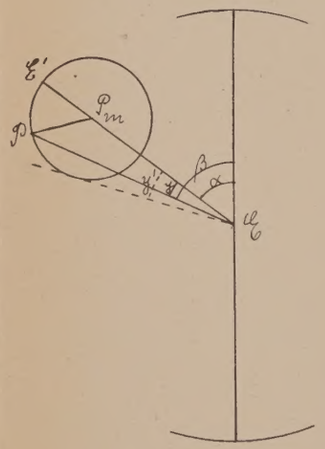

Fig. 20.

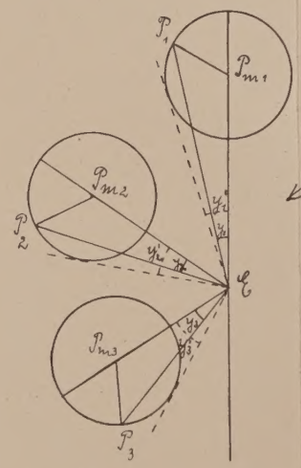

Fig. 21.

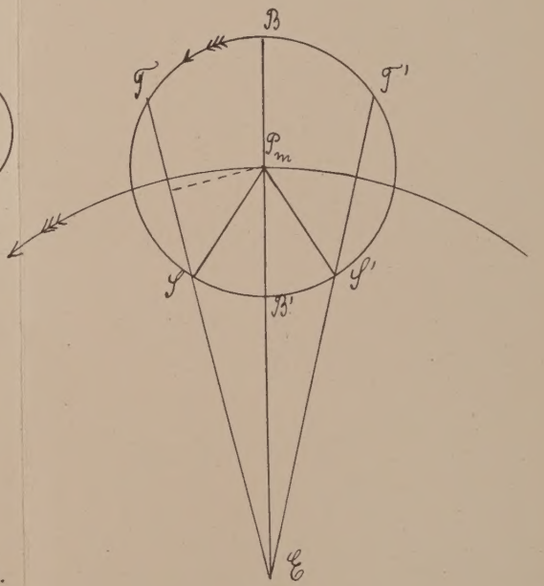

Fig. 22.

Fig. 23.

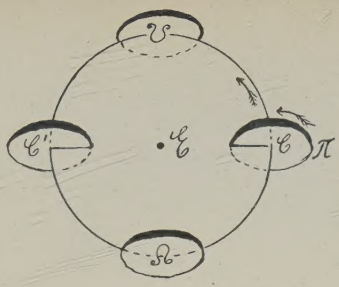

Fig. 24.

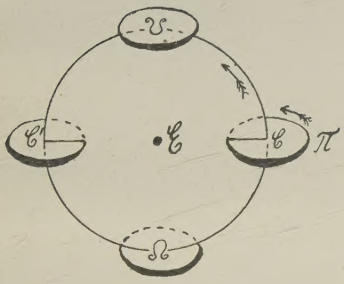

Fig. 25.

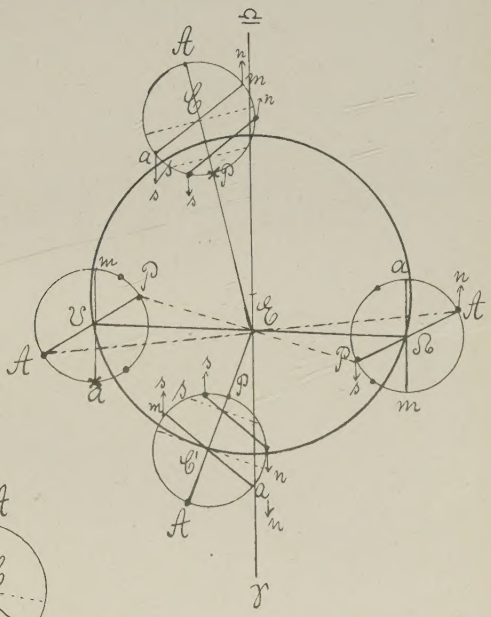

Fig. 27.

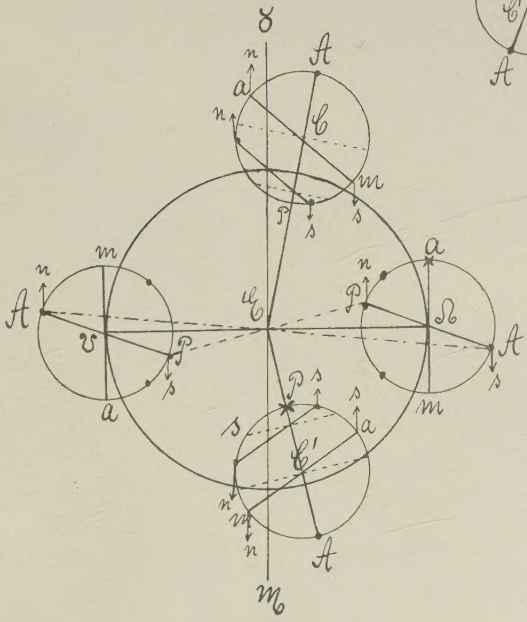

Fig. 26.